Spil & Sandsynlighed

Preben Blæsild

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Spil & Sandsynlighed
Preben Blæsild
1. udgave 2004
Sats og Typografi: Preben Blæsild & Lars Madsen
Sat med $\LaTeX 2_\varepsilon$ i *palatino* med *pazo* og *computer modern* matematikfonte.
Figur 2.1 og Figur 2.3 er lavet i Excel™.

Indhold

Forord

I standardforsøget for matematik på den matematiske linje i gymnasiet er det obligatoriske pensum reduceret med ca. 30%, så ca 1/3 af undervisningstiden kan og skal bruges på valgfrie emner. På B-niveau og A3-niveau skal der bruges mindst 15 timer på emner inden for sandsynlighedsregning og statistik. Hæftet skal ses som forslag til ét valgfrit emneforløb i sandsynlighedsregning.

Med udgangspunkt i nogle få velkendte spil introduceres de begreber fra sandsynlighedsregningen, der gør det muligt præcist at besvare relevante spørgsmål vedrørende disse spil såsom *Hvad er chancen for at vinde?* og *Hvor stor er den forventede gevinst?*

Hæftet er en introduktion til nogle få af de basale begreber i sandsynlighedsregningen, såsom sandsynlighedsmål på endelige mængder, uafhængighed, stokastiske variable og middelværdi af stokastiske variable. Det er tilstræbt at benytte en præcis matematisk formulering ved definitionen og anvendelserne af disse begreber.

Hæftet omtaler altså blot nogle få begreber fra sandsynlighedsregningen; på samme måde er hæftet langtfra udtømmende i omtalen af forskellige spil. En mere omfattende mængde af populære spil i Danmark betragtes i Andersen (1998), som har været én af inspirationskilderne til hæftet.

I Kapitel 1 introduceres de spil, der regnes på senere i hæftet. Foruden et lotteri drejer det sig om følgende spil, som Dansk Tipstjeneste udbyder: *JOKER*, *LOTTO*, *Tips 12*, *Tips 13* og *Den Lange*. Kapitel 2 starter med den notation fra mængdelæren, der er nødvendig i forbindelse med definitionen af et sandsynlighedsmål og formuleringen af regneregler for sandsynligheder senere i kapitlet. Endvidere indføres stokastiske variable og middelværdier af disse. Kapitel 3 vedrører lotterier og i Kapitel 4 omtales væddemål og relaterede emner, såsom kombination af væddemål og systemspil. Endelig vedrører Kapitel 5 beregning af præmier. I slutningen af Kapitel 2 – 5 er der opgaver. En facitliste til disse opgaver findes bagest i hæftet på side 42. En liste med matematiske symboler findes i begyndelsen af Indeks på side 49.

I hæftet benyttes ☞ og 👍 henholdsvis før og efter eksempler. Definitioner og sætninger afsluttes med ❏ og beviser med ■. Endelig bruges ✎ i forbindelse med formulering af opgaver.

Da matematiske it-kompetencer kan være en integreret del af valgfrie emneforløbene i standardforsøget, er der lavet regneark i *Excel*, som udfører beregningerne i hæftets eksempler og opgaver. Disse kan hentes på internettet på adressen:

`http://home.imf.au.dk/preben/S&S`

I forbindelse med udarbejdelse af eksempler og opgaver vil jeg gerne takke for hjælp fra Tom Helligsøe fra Sponsorudvalget i I.F. Lyseng Fodbold, Peter Hunsbal og Karl Skytte fra Totalisatoren på Jydsk Væddeløbsbane, Rolf Laugesen, Dantoto og Morten Sørensen, Dansk Tipstjeneste.

Desuden tak til Lars Bo Kristensen, Tørring Gymnasium, for hans kommentarer til hæftet.

Hæftet er skrevet i LaTeX med velvillig og særdeles kompetent hjælp fra Lars Madsen, som også har lavet hæftets layout.

Aarhus, januar 2004. Preben Blæsild

1 Indledning

Mennesker har altid været fascineret af at spille, det vil sige, at risikere en indsats på at en bestemt hændelse indtræffer for at opnå en gevinst, hvis hændelsen indtræffer. I forbindelse med ethvert spil er spørgsmål som *Hvad er chancen for at vinde*? og *Hvor stor er den forventede gevinst*? interessante. Spørgsmål af denne art var inspirationskilden til sandsynlighedsregningen, som er den matematiske disciplin, der beskæftiger sig med teorien for tilfældige hændelser. Udviklingen af sandsynlighedsregningen startede for alvor i begyndelsen af 1500-tallet og skyldes specielt italieneren Cardano. Vi vil ikke her komme nærmere ind på sandsynlighedsregningens historie, men blot henvise interesserede læsere til Hoffmann-Jørgensen (1994) og referencer heri.

I nogle situationer er spillet dog så ukompliceret, at de to ovenstående spørgsmål kan besvares ved ganske almindelig regning. Dette er tilfældet i

☞ **Eksempel 1.1** Et lotteri, hvortil der er $n = 160$ lodsedler a $p_L = 20$ kr. per lod, har følgende præmier:

Præmie	*antal*		*værdi i* kr.
1	1	Luxus håndbruser	1100
2	1	Jakke	500
3	1	Skakspil	400
4	2	Legetøj	300
5	1	Gavekort	250
6	1	Tøj	250
7	1	Gavekort	180
8	1	Børnerygsæk	150
9	1	Gavekort	100
10	1	6 glas	100
11	3	Rødvin	50

Tabel 1.1: Listen over præmier i et lotteri.

Der er altså 11 forskellige præmier, og da der er 2 fjerde præmier og 3 elvte præmier, er det samlede antal præmier $a = 14$. De 160 lodsedler har samme chance for at vinde, så chancen for en præmie på en bestemt lodseddel er

$$\frac{a}{n} = \frac{14}{160} = 0.0875.$$

Den samlede værdier af præmierne eller arrangørernes udgift til lotteriet er $u = 3780$ kr. Den gennemsnitlige værdi i kr. af præmien per lod er således

$$\frac{u}{n} = \frac{3780}{160} = 23.6250.$$

Hvis vi herfra trækker prisen for et lod, får vi den gennemsnitlige gevinst i kr. per lod, som altså er

$$\frac{u}{n} - p_L = 23.6250 - 20 = 3.6250.$$

Den gennemsnitlige gevinst per lod er altså positiv, hvilket er højst usædvanligt i et lotteri. Dette afspejler sig også ved, at arrangørens fortjeneste i kr., som er indtægten fra de 160 lodder a 20 kr. minus udgiften, det vil sige

$$np_L - u = 160 \times 20 - 3780 = -580,$$

er negativ.

Lotteriet blev afholdt i forbindelse med fodboldklubben I.F. Lyseng's hjemmekamp i Jyllandsserien mod Randers Freja den 9. juni 2003. Ved hver af klubbens 13 hjemmekampe arrangeres et tilsvarende lotteri for klubbens 160 målaktionærer. Hver aktionær betaler 50 kr. i indskud og 5 kr. per mål, som klubben scorer i turneringen. Vi har her antaget, at hver aktionær betaler 260 kr. årligt. Prisen for at deltage i lotteriet er derfor 20 kr. per hjemmekamp. Forklaringen på det usædvanlige lotteri er, at alle præmierne er sponsoreret af forskellige firmaer, så klubben reelt ingen udgifter har til lotteriet.

Andre spil er mere komplicerede. Vi skal senere beregne chancen for at vinde i de følgende tre eksempler:

☞ **Eksempel 1.2** Et jokertal er et syvcifret tal, hvor hvert ciffer er et af tallene 0, 1, . . ., 9. Spiller man *JOKER* er antallet af rigtige på en række lig med antallet af cifre fra højre mod venstre, der stemmer overens med jokertallet. Er jokertallet for eksempel 0123456 og man har tallet 0943456 er der fire rigtige. Har man derimod tallet 0123459 har man ingen rigtige.

I *JOKER*, der kun kan spilles sammen med andre af Dansk Tipstjenestes spil som *LOTTO*, *Tips 12*, *Tips 13* for eksempel, udbetales der præmier til rækker med 7, 6, 5, 4, 3 og 2 rigtige.

☞ **Eksempel 1.3** En række i *LOTTO* består af 7 af de første 36 hele positive tal. Der udtrækkes 7 vindertal og 2 tillægstal og der udbetales præmier til rækker med 7 vindertal, 6 vindertal + 1 tillægstal, 6 vindertal, 5 vindertal og 4 vindertal.

☞ **Eksempel 1.4** Spillet *Tips 12* hos Dansk Tipstjeneste går ud på at tippe om hver af de 12 fodboldkampe på tipskuponen resulterer i henholdsvis hjemmesejr (1), uafgjort ($\times$) eller udesejr (2). I Tabel 1.2 ses en udfyldt række på tipskuponen i uge 31 i 2003.

Der udbetales præmie til rækker med 12, 11 og 10 rigtige.

Tipstjenesten har et tilsvarende spil *Tips 13* med 13 kampe på tipskuponen, hvor der er præmie til rækker med 13, 12, 11 og 10 rigtige.

I forbindelse med væddemål udtrykkes præmiens størrelse ofte ved hjælp af "odds". I Kapitel 4 diskuteres sammenhængen mellem odds og chancen for at vinde med udgangspunkt i

1. AB – AaB	1		
2. AGF – FC Nordsjælland	1		
3. Frem – Brøndby			2
4. Herfølge – FC Midtjylland		×	
5. Viborg – Esbjerg			2
6. HFK Sønderjylland – Randers FC		×	
7. Horsens – Brønshøj	1		
8. Køge – Vejle	1		
9. Silkeborg – B 1913	1		
10. Skjold – Fremad Amager		×	
11. Ølstykke – Nykøbing F All.	1		
12. Hvidovre – Næstved			2

Tabel 1.2: En udfyldt række på tipskuponen i uge 31 i 2003.

☞ **Eksempel 1.5** I Tabel 1.3 er vist de odds Dansk Tipstjeneste tilbød i spillet *Den Lange* for de seks kampe i den næstsidste runde (18. juni 2003) af SAS-Ligaen 2002/03.

Kamp	1	×	2
AaB – FC Midtjylland	2.00	3.35	2.85
AB – Farum	2.10	3.30	2.70
AGF – Esbjerg	2.45	3.00	2.45
Brøndby – FC København	1.95	3.25	3.05
OB – Silkeborg	1.50	4.40	3.90
Viborg – Køge	1.35	4.10	6.00

Tabel 1.3: Odds for de seks kampe i næstsidste runde af SAS-ligaen 2002/03.

2 Lidt sandsynlighedsteori

I sandsynlighedsteorien udtrykkes chancen for at hændelser, det vil sige mængder af tilfældige udfald, indtræffer ved hjælp af sandsynligheder. De spil, vi betragter her, har et endeligt antal udfald, så i de teoretiske overvejelser kan vi nøjes med at betragte et endeligt *udfaldsrum* E, det vil sige en mængde E, som har et endeligt antal elementer. En *hændelse* A er en delmængde af E, som siges at *indtræffe*, hvis *udfaldet* e af spillet tilhører mængden A. Et *sandsynlighedsmål* P på E er en funktion, som til enhver hændelse A knytter et tal $P(A)$, *sandsynligheden for* A. For at give en præcis definition af et sandsynlighedsmål i Afsnit 2.2 og vise regnereglerne for sandsynligheder i Afsnit 2.3 er det nødvendigt at kende den notation fra mængdelæren, som er gengivet i Afsnit 2.1. I eksemplerne beregnes sandsynligheden $P(A)$ ofte som antallet af elementer i A, $\#A$, divideret med antallet af elementer i E, $\#E$. I Afsnit 2.4 diskuteres, hvorledes disse antal kan bestemmes i forskellige situationer.

I Afsnit 2.5 introduceres *stokastiske variable*, som er funktioner defineret på udfaldsrummet E med værdier på den reelle akse, som blandt andet er nyttige, når vi skal finde den forventede gevinst i et spil. Denne størrelse udtrykkes ved hjælp af *middelværdien* af en stokastisk variabel, som defineres og eksemplificeres i Afsnit 2.6. Endelig er der opgaver i slutningen af kapitlet.

2.1 Notation fra mængdelæren

Hvis A og E er to mængder, er A en *delmængde* af E og vi bruger notationen $A \subseteq E$, hvis alle elementer i A også er elementer i E, det vil sige

$$e \in A \;\Rightarrow\; e \in E.$$

De følgende fire definitioner er illustreret i Figur 2.1 på side 5. Hvis $A \subseteq E$, er *komplementærmængden* til A (inden for E) mængden af elementer i E som ikke tilhører A,

$$A^C = \{e \in E \mid e \notin A\}.$$

Hvis A og B er delmængder af E, er *foreningsmængden* af A og B mængden af elementer i E som tilhører enten A eller B,

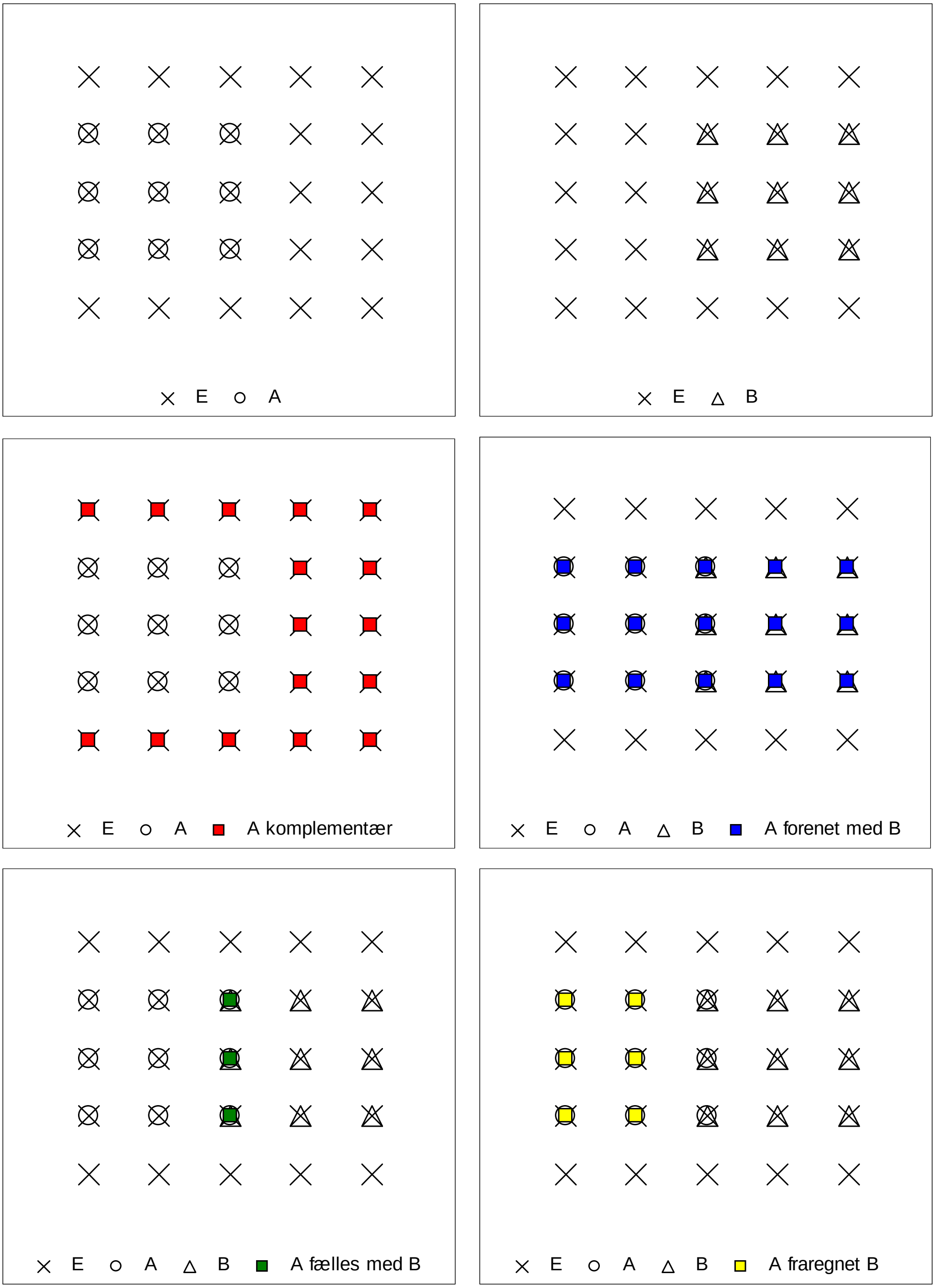
$$A \cup B = \{e \in E \mid e \in A \text{ eller } e \in B\},$$

fællesmængden af A og B er mængden af elementer i E som tilhører både A og B,

$$A \cap B = \{e \in E \mid e \in A \text{ og } e \in B\},$$

og *mængdedifferensen* mellem A og B er mængden af elementer i A som ikke tilhører B,

$$A \setminus B = \{e \in A \mid e \notin B\} = A \cap B^C.$$



Figur 2.1: Illustration af følgende delmængder af E: Øverst mængderne A og B. I midten A^C (A komplementær) og $A \cup B$ (A forenet med B). Nederst $A \cap B$ (A fælles med B) og $A \setminus B$ (A fraregnet B).

Foreningsmængden af n delmængder $A_1, A_2 \ldots, A_n$ af E er mængden

$$A_1 \cup \cdots \cup A_n = \{e \in E \mid e \in A_i \text{ for mindst et } i = 1 \ldots, n\}$$

og *fællesmængden* af $A_1, A_2 \ldots, A_n$ er mængden

$$A_1 \cap \cdots \cap A_n = \{e \in E \mid e \in A_i \text{ for alle } i = 1 \ldots, n\}.$$

(Hvis for eksempel $E = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A_1 = \{1,2,3\}$, $A_2 = \{2,3,4\}$ og $A_3 = \{3,4,5\}$, så er $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1,2,3,4,5\}$ og $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{3\}$.)

Den *tomme mængde* $\emptyset$ er mængden uden elementer. Den opfattes som en delmængde af enhver anden mængde.

To delmængder A og B af E siges at være *disjunkte*, hvis

$$A \cap B = \emptyset,$$

og elementerne i en følge af delmængder, $A_1, A_2, \ldots, A_n$, siges at være *parvis disjunkte*, hvis

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \text{hvis } i \neq j,\ i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

det vil sige, hvis det for alle par A_i og A_j af mængder med forskellige indeks gælder, at A_i og A_j er disjunkte.

2.2 Definition af sandsynlighedsmål

Et *sandsynlighedsmål* P på et endeligt *udfaldsrum* E er en funktion, der til en delmængde A af mængden E tilordner et tal $P(A)$, som ligger i intervallet $[0,1]$. Funktionen skal opfylde to betingelser som angivet i

Definition 2.1 *Et sandsynlighedsmål P på udfaldsrummet E er en funktion*

$$P : E \supseteq A \to P(A) \in [0,1],$$

der opfylder to betingelser:

(1) $P(E) = 1$.

(2) Hvis $A_1, \ldots, A_n$ er parvis disjunkte mængder, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, så er

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n). \tag{2.1}$$

❑

Elementer i E omtales som *udfald* og delmængder A af E som *hændelser*. En hændelse A *indtræffer*, hvis $e \in A$, det vil sige, hvis udfaldet e er i mængden A.

2.3 Regneregler for sandsynligheder

Ud fra Definition 2.1 kan man vise en række af regneregler for sandsynlighedsmål. I sætningen nedenfor gengives de regneregler, vi har brug for.

Sætning 2.1 *Hvis P er et sandsynlighedsmål på E og A og B er hændelser gælder der:*

$$P(\emptyset) = 0. \tag{2.2}$$

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(B), \quad \textit{hvis } A \supseteq B. \tag{2.3}$$

$$P(A^C) = 1 - P(A). \tag{2.4}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{2.5}$$

❏

Bevis Hvis $A \supseteq B$ er A foreningsmængden af de to disjunkte mængder $A \setminus B$ og B, det vil sige, $A = (A \setminus B) \cup B$. Benytter vi (2.1) med $n = 2$, $A_1 = A \setminus B$ og $A_2 = B$, får vi at

$$P(A) = P(A \setminus B) + P(B),$$

hvoraf (2.3) følger.

Formel (2.4) er et specialtilfælde af (2.3), idet $A^C = E \setminus A$ og $P(E) = 1$. Sætter vi A og B i formel (2.3) lig med henholdsvis E og A, finder vi

$$P(A^C) = P(E \setminus A) = P(E) - P(A) = 1 - P(A).$$

Da $\emptyset = E^C$, fås (2.2) af (2.4), idet

$$P(\emptyset) = P(E^C) = 1 - P(E) = 0.$$

For at vise (2.5) bemærker vi at formlen

$$A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B)$$

giver en opdeling af $A \cup B$ i tre disjunkte hændelser. Ved hjælp af (2.1) med $i = 3$ og (2.3), finder vi

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \setminus (A \cap B)) + P(B \setminus (A \cap B)) + P(A \cap B) \\ &= (P(A) - P(A \cap B)) + (P(B) - P(A \cap B)) + P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B), \end{aligned}$$

hvilket er formel (2.5). ■

☞ **Eksempel 2.1** Hvis udfaldsrummet E er en endelig mængde med $\#E$ elementer, er der i alt $2^{\#E}$ delmængder af E, se Opgave 2.3 på side 17. Det kan let vises, at funktionen P, som til enhver delmængde A af E tilordner tallet

$$P(A) = \frac{\#A}{\#E}, \tag{2.6}$$

er et sandsynlighedsmål, som kaldes det *uniforme sandsynlighedsmål* på E. Sandsynligheden for en delmængde A er altså blot antallet af elementer i A divideret med antallet af elementer i E, specielt gælder der, at alle elementer e i E har samme sandsylighed, nemlig

$$P(\{e\}) = \frac{1}{\#E}, \quad e \in E.$$

☞ **Eksempel 2.2** Antag at vi kaster en rød og en blå terning samtidigt. Udfaldsrummet E, det vil sige de mulige udfald, kan beskrives som

$$E = \{(r,b) \mid r,b = 1,2,\ldots,6\},$$

hvor r antallet af øjne den røde terning viser og b er antallet af øjne den blå terning viser, se Figur 2.2. Antag, at vi betragter det uniforme sandsynlighedsmål på E, defineret i Eksempel 2.1.

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Figur 2.2: Udfaldsrummet for kast med en rød og en blå terning.

Lad A betegne hændelsen at de to terninger viser samme antal øjne, det vil sige

$$A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\},$$

så ifølge (2.6) er $P(A) = \#A/\#E = 6/36 = 1/6$.

Hvis B betegner hændelsen at de to terninger viser et forskelligt antal øjne, er $B = A^C$ og ved hjælp af (2.4) finder vi

$$P(B) = P(A^C) = 1 - P(A) = 1 - 1/6 = 5/6.$$

Lad C betegne hændelsen at mindst en af de to terninger viser seks øjne. Sandsynligheden $P(C)$ kan beregnes ved hjælp af formel (2.6), idet $\#C = 11$, men for at illustrere regnereglerne for sandsynligheder lader vi C_r og C_b betegne hændelserne at henholdsvis den røde og den blå terning viser seks øjne, det vil sige at

$$C_r = \{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

og

$$C_b = \{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6)\}.$$

Da $C = C_r \cup C_b$ og $C_r \cap C_b = \{(6,6)\}$, finder vi ved hjælp af (2.5) at

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C_r \cup C_b) = P(C_r) + P(C_b) - P(C_r \cap C_b) \\ &= 6/36 + 6/36 - 1/36 = 11/36. \end{aligned}$$

Lad D betegne hændelsen at præcis én af de to terninger viser seks øjne. Da $D = C \setminus (C_r \cap C_b)$ og $C \supseteq C_r \cap C_b$, får vi fra (2.3) at

$$\begin{aligned} P(D) &= P(C \setminus (C_r \cap C_b)) = P(C) - P(C_r \cap C_b) \\ &= 11/36 - 1/36 = 10/36, \end{aligned}$$

samme resultat, som vi ville have fået ved hjælp af (2.6), idet $\#D = 10$.

2.4 Optælling af antal delmængder

Når man i en konkret situation skal beregne sandsynligheder som "antal gunstige" divideret med "antal mulige", det vil sige ved hjælp af formel (2.6), er det vigtigt at kende visse regler til bestemmelse af disse antal. Ofte er situationen den, at vi vælger x elementer ud blandt n, hvor n og x er hele positive tal.

Ved bestemmelsen af antallet af måder, vi kan vælge x elementer blandt n elementer, er det vigtigt af skelne mellem om rækkefølgen af de x elementer er væsentlig eller ej.

Rækkefølgen af de x elementer er væsentlig

(a) Hvis **gengangere** blandt de x elementer **er tilladt**, er antallet af måder, vi kan vælge x elementer ud blandt n elementer, "n i x'te",

$$n^x = n \times n \times \cdots \times n, \tag{2.7}$$

det vil sige n ganget med sig selv x gange, fordi vi i hvert af de x valg har n muligheder.

(b) Hvis **gengangere** blandt de x elementer **ikke er tilladt**, betegnes antallet af måder, vi kan vælge x elementer ud blandt n, med $n^{(x)}$, "n i x rund".

Hvis $x \leq n$ er

$$n^{(x)} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-x+2) \times (n-x+1), \tag{2.8}$$

fordi vi har n muligheder når det første af de x elementer skal vælges, $n-1$ muligheder når det andet af de x elementer skal vælges osv. Når det næstsidste af de x elementer skal vælges, har vi allerede valgt $x-2$ og har $n-x+2$ muligheder tilbage, og når det sidste skal vælges, har vi allerede valgt $x-1$ og har $n-x-1$ muligheder tilbage.

Hvis $x > n$ er $n^{(x)} = 0$ og per definition sættes

$$n^{(0)} = 1. \tag{2.9}$$

Tallet $n^{(x)}$ omtales ofte som antallet af *permutationer* af x elementer, der kan vælges blandt n elementer.

Tallet $n^{(n)}$ betegnes sædvanligvis $n!$, "n fakultet", det vil sige

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1, \tag{2.10}$$

og det angiver antallet af *permutationer* af de n elementer, det vil sige antallet af forskellige rækkefølger af de n elementer. Per definition sættes

$$0! = 1. \tag{2.11}$$

☞ **Eksempel 1.2 (fortsat)** I *JOKER* er de 7 cifres rækkefølge væsentlig. Endvidere kan hvert af de 10 tal 0, 1, ..., 9 optræde mere end én gang. Antallet af mulige jokertal er derfor

$$10^7 = 10000000.$$

(Antallet af jokertal hvor de 7 cifre er forskellige er $10^{(7)} = 604800$.)

For at beregne sandsynligheden for præcis x rigtige, finder vi antallet af rækker med præcis x rigtige.

Hvis $x = 0$, stemmer sidste ciffer ikke overens med jokertallet, hvilket kan ske på 9 måder, mens de øvrige 6 cifre kan være tilfældige, så antallet af rækker med $x = 0$ rigtige er 9×10^6.

Hvis $x = 1, \ldots, 6$, skal de sidste x cifre være rigtige, hvilket kun kan ske på én måde; desuden skal ciffer $x+1$ fra højre være forkert, hvilket kan ske på 9 måder; endelig kan de resterende $7-(x+1) = 6-x$ cifre vælges tilfældigt, hvilket kan ske på 10^{6-x} måder; antallet af rækker med x rigtige er derfor

$$9 \times 10^{6-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, 6.$$

Endelig er der kun en måde hvorpå $x = 7$, og ved hjælp af (2.6) på side 7 finder vi derfor, at sandsynligheden for x rigtige er

$$P(x\,\text{rigtige}) = \begin{cases} 0.9 \times 10^{-x} & \text{hvis } x = 0, 1, \ldots, 6 \\ 10^{-7} & \text{hvis } x = 7. \end{cases} \tag{2.12}$$

☜

Rækkefølgen af de x elementer er uvæsentlig

Antallet af måder vi kan vælge x elementer blandt n elementer, når rækkefølgen af de x elementer er uden betydning og gengangere **ikke er tilladt**, betegnes $\binom{n}{x}$. Der gælder, at

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}, \tag{2.13}$$

hvis $x \leq n$. Dette kan indses således: Hvis vi for hver af de $\binom{n}{x}$ måder at udtage x elementer blandt de n først betragter alle permutationer af de x elementer og dernæst alle permutationer af de resterende $n-x$ elementer, så får vi alle permutationer af alle n elementer, det vil sige

$$n! = \binom{n}{x} x!\,(n-x)!,$$

hvilket er det samme som (2.13).

Hvis $x > n$ er $\binom{n}{x} = 0$, og per definition sættes

$$\binom{n}{0} = 1. \tag{2.14}$$

Tallet i (2.13) omtales ofte som antallet af *kombinationer* af x elementer udvalgt blandt n elementer. I Opgave 2.1 vises følgende formler for disse antal:

$$\binom{n}{n-x} = \binom{n}{x}, \tag{2.15}$$

$$\binom{n}{x} = \frac{n^{(x)}}{x!} \tag{2.16}$$

og rekusionsformlerne

$$\binom{n+1}{x} = \binom{n}{x} + \binom{n}{x-1}, \quad x = 1, \ldots, n, \tag{2.17}$$

som viser, hvorledes antallene for $n+1$ elementer kan beregnes, hvis man kender antallene for n elementer. Ifølge (2.14) og (2.15) er $\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$. Tallene $\binom{n}{x}$ præsenteres ofte i *Pascals trekant*, se Tabel 2.1, og formel (2.17) viser, hvorledes tallene i det $(n+1)$'te række i trekanten kan beregnes ud fra tallene i det n'te række.

Bemærkning 2.1 Tallet $\binom{n}{x}$ omtales også som en *binomial koefficient*. Det skyldes, at tallene optræder som koefficienter i udtrykket for en to-leddet (binomiel) størrelse opløftet til en heltallig potens. Mere præcist vises det i Opgave 2.2, at

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^0 b^{n-0} + \cdots + \binom{n}{x} a^x b^{n-x} + \cdots + \binom{n}{n} a^n b^{n-n}.$$

Ved hjælp af summationstegnet $\sum$ skrives formlen ofte kort på følgende måde

$$(a+b)^n = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} a^x b^{n-x}. \tag{2.18}$$

❏

n	$\binom{n}{x}$												
0							1						
1						1		1					
2					1		2		1				
3				1		3		3		1			
4			1		4		6		4		1		
5		1		5		10		10		5		1	
6	1		6		15		20		15		6		1

Tabel 2.1: De syv første rækker i Pascals trekant. I rækken nummereret med n findes tallene $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\dots$, $\binom{n}{x}$, $\dots$, $\binom{n}{n}$. Bemærk, at ifølge (2.17) kan $\binom{n}{x}$ beregnes ved at addere de to nærmeste tal i rækken ovenfor.

☞ **Eksempel 1.3 (fortsat)** I *LOTTO* er rækkefølgen af de 7 tal, der vælges blandt de første 36 hele positive tal, ikke væsentlig. Antallet af mulige lottorækker er derfor

$$\binom{36}{7} = 8347680.$$

Antallet af rækker med x rigtige vindertal er $\binom{7}{x}\binom{29}{7-x}$, det vil sige antallet af måder hvorpå de x rigtige kan vælges blandt de 7 vindertal ganget med antallet af måder hvorpå de resterende $7-x$ numre på rækken kan vælges blandt de 29 numre, som ikke er vindertal. Formel (2.6) på side 7 giver derfor følgende sandsynligheder:

$$P(x \text{ rigtige vindertal}) = \frac{\binom{7}{x}\binom{29}{7-x}}{\binom{36}{7}}, \quad x = 0, 1, \dots, 7. \tag{2.19}$$

På tilsvarende måde vises det i Opgave 2.9, at for $x = 0, 1, \dots, 7$ og $y = 0, 1, 2$ så $x + y \leq 7$ er

$$P(x \text{ rigtige vindertal og } y \text{ rigtige tillægstal}) = \frac{\binom{7}{x}\binom{2}{y}\binom{27}{7-(x+y)}}{\binom{36}{7}}. \tag{2.20}$$

☜

Beregninger

Størrelserne n^x, $n^{(x)}$, $n!$ og $\binom{n}{x}$ kan beregnes på langt de fleste lommeregnere. I regnearket *Excel* kan størrelserne beregnes ved hjælp af funktionerne `POTENS`, `PERMUT`, FAKULTET og KOMBIN, idet

$$n^x = \texttt{POTENS(n;x)} \qquad n^{(x)} = \texttt{PERMUT(n;x)}$$
$$n! = \texttt{FAKULTET(n)} \qquad \binom{n}{x} = \texttt{KOMBIN(n;x)}$$

2.5 Stokastiske variable

En *stokastisk variabel* er som tidligere nævnt en funktion defineret på udfaldsrummet E med værdier på den reelle akse R, det vil sige en forskrift som til ethvert udfald tilordner et reelt tal. Ofte kan hændelser, det vil sige delmængder A af E, karakteriseres ved hjælp af sådanne funktioner. For eksempel svarer hændelsen $\{\,(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\,\}$ i Eksempel 2.2 på side 8 således til at funktionen S, der angiver summen af øjnene på de to terninger, har værdien 5, det vil sige $\{\,(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\,\} = \{\,S = 5\,\}$.

En vigtig stokastisk variabel i forbindelse med spil er funktionen som til et givet udfald tilordner den tilsvarende gevinst.

Eksempel 2.3 Antag, at vi betaler 2 kr. for at deltage i et spil med én terning. Hvis terningen viser et ulige antal øjne, taber vi de 2 kr. Hvis terningen viser et lige antal øjne, får vi udbetalt lige så mange kr. som antal øjne terningen viser minus indsatsen på de 2 kr. Gevinsten, det vil sige det beløb vi får udbetalt, kan beskrives ved hjælp af følgende funktion X defineret på udfaldsrummet $E = \{\,1,2,3,4,5,6\,\}$:

udfald	e	1	2	3	4	5	6
gevinst	$X(e)$	-2	0	-2	2	-2	4

Vi antager i det følgende, at der er givet et sandsynlighedsmål P på udfaldsrummet E.

Definition 2.2 *En stokastisk variabel X er en funktion, som er defineret på udfaldsrummet E og som antager værdier på den reelle akse R, det vil sige*

$$\begin{aligned} X\colon E &\to R \\ e &\to X(e). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Da E er en endelig mængde, er værdimængden $Vm(X)$ for X en endelig delmængde af R. For $x \in Vm(X)$ skriver vi kort $X = x$ for hændelsen $\{\,e \mid X(e) = x\}$, så

$$P(X = x) = P(\{e \mid X(e) = x\}) = \sum_{e:X(e)=x} P(\{e\}). \tag{2.22}$$

Selv om værdien $X(e)$ af den stokastiske variable X ikke er kendt, før vi kender udfaldet e, kan *fordelingen af* X, det vil sige sandsynligheden for de forskellige værdier af X, beregnes ved hjælp af sandsynlighedsmålet P, inden vi kender udfaldet e. Dette gøres ved hjælp af sandsynlighedsfunktionen for X, som defineres således:

Definition 2.3 *Lad X være en stokastisk variabel med værdimængde $Vm(X)$. Funktionen*

$$\begin{aligned} f_X\colon Vm(X) &\to [0,1] \\ x &\to f_X(x) = P(X = x) \end{aligned} \tag{2.23}$$

kaldes sandsynlighedsfunktionen for X. ❏

☞ **Eksempel 2.3 (fortsat)** Vi betragter det uniforme sandsynlighedsmål på udfaldsrummet $E = \{1,2,3,4,5,6\}$. Sandsynlighedsfunktionen for gevinsten X i terningespillet er:

x	-2	0	2	4
$f_X(x)$	$1/2$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

fordi, for eksempel,

$$f_X(-2) = P(X = -2) = P(\{1,3,5\}) = 3/6 = 1/2$$

og

$$f_X(0) = P(X = 0) = P(\{2\}) = 1/6.$$

u

☞ **Eksempel 2.2 (fortsat)** Når vi kaster en rød og en blå terning samtidigt, er udfaldsrummet $E = \{(r,b) \mid r,b = 1,2,\ldots,6\}$, hvor r og b er antallet af øjne som henholdsvis den røde og den blå terning viser. Den stokastiske variabel, der angiver summen af øjnene på de to terninger, er

$$S(r,b) = r + b$$

med værdimængde $Vm(S) = \{2,3,\ldots,11,12\}$. Hændelsen $\{S = 5\}$ består af udfaldene

$$\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\},$$

og betragter vi det uniforme sandsynlighedsmål på E, er

$$f_S(5) = P(S = 5) = 4/36 = 1/9.$$

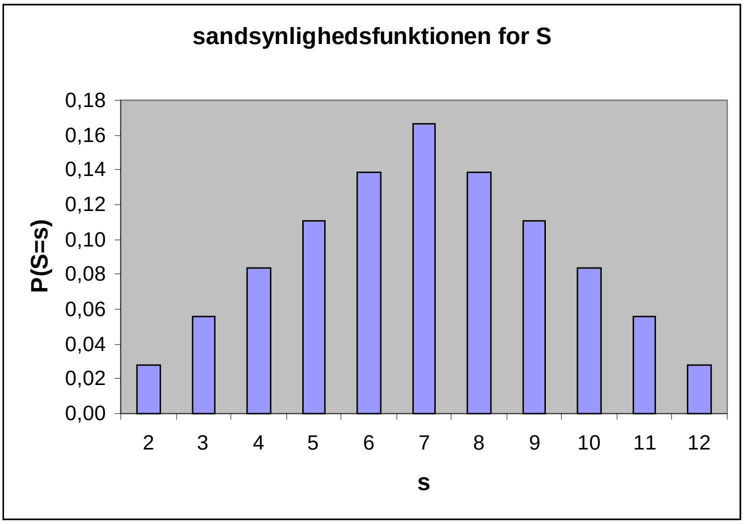
På samme måde vises det, at sandsynlighedsfunktionen for S er bestemt ved

s	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f_S(s)$	1/36	1/18	1/12	1/9	5/36	1/6	5/36	1/9	1/12	1/18	1/36

Funktionen er vist i Figur 2.3, som er lavet i *Excel*. ☝

Bemærkning 2.2 Af tabellen ovenfor ses, at

$$\sum_{s=2}^{12} f_S(s) = \sum_{s=2}^{12} P(S = s) = 1.$$



Figur 2.3: Sandsynlighedsfunktionen for den stokastiske variabel S, der angiver summen af øjnene på den røde og blå terning.

For en vilkårlig stokastisk variabel gælder der tilsvarende, at

$$\sum_{x \in Vm(X)} P(X = x) = 1, \tag{2.24}$$

hvilket indses således: Udfaldsrummet E er foreningsmængden af de disjunkte mængder $\{e \mid X(e) = x\}$ som er indiceret ved $x \in Vm(X)$. (Af Figur 2.2 på side 8 ses, at i Eksempel 2.2 ovenfor er udfaldsrummet E en foreningsmængde af de disjunkte mængder $\{(r,b) \mid r+b = 2\}$, $\{(r,b) \mid r+b = 3\}, \ldots, \{(r,b) \mid r+b = 11\}$, $\{(r,b) \mid r+b = 12\}$.) Da $P(E) = 1$, fås ved hjælp af (2.22) at

$$1 = \sum_{e \in E} P(\{e\}) = \sum_{x \in Vm(X)} \sum_{e:X(e)=x} P(\{e\}) = \sum_{x \in Vm(X)} P(X = x). \qquad \square$$

2.6 Middelværdi

I anvendelser er man ofte ikke interesseret i den nøjagtige fordeling for X, men derimod i visse størrelser der beskriver vigtige egenskaber ved fordelingen. Disse er ofte givet som et tal, der bestemmes ud fra fordelingen. En sådan er middelværdien af X, der defineres således:

Definition 2.4 *Lad X være en stokastisk variabel med værdimangde $Vm(X)$ og sandsynlighedsfunktion f_X. Middelværdien EX af X er tallet*

$$EX = \sum_{x \in Vm(X)} x f_X(x) = \sum_{x \in Vm(X)} x P(X = x), \tag{2.25}$$

det vil sige summen over alle mulige værdier x af X ganget med sandsynligheden for at X antager værdien x. ❑

Bemærkning 2.3 Brugen af bogstavet E i forbindelse med middelværdien EX stammer fra engelsk, hvor middelværdien ofte omtales som "**E**xpected value". Forhåbentlig giver det ikke anledning til misforståelser, at vi her også bruger E til at betegne udfaldsrummet med. ❑

Bemærkning 2.4 Ved hjælp af (2.24) kan vi omskrive (2.25) til

$$EX = \frac{\sum_{x \in Vm(X)} x P(X = x)}{\sum_{x \in Vm(X)} P(X = x)},$$

som viser, at middelværdien EX er et tal, der ligger central i fordelingen af X, da den er en vægtet sum af de forskellige værdier x af X med vægte $P(X = x)$. ❑

Et par vigtige regneregler for middelværdier findes i Sætning 2.2, som vises i Opgave 2.5.

Sætning 2.2 *Lad X og Y være stokastiske variable og lad a og b være reelle tal. Da gælder:*

$$E(a + bX) = a + bEX \tag{2.26}$$

og

$$E(X + Y) = EX + EY. \tag{2.27}$$

❑

☞ **Eksempel 2.3 (fortsat)** Ved hjælp af sandsynlighedsfunktionen $f_X(x)$ for gevinsten X i tabellen på side 14 og formel (2.25) fås, at middelværdien af X er

$$EX = -2 \times 1/2 + 0 \times 1/6 + 2 \times 1/6 + 4 \times 1/6 = 0.$$

☞ **Eksempel 2.2 (fortsat)** Ved hjælp af sandsynlighedsfunktionen for S, summen af øjnene på de to terninger, i tabellen på side 14 og formel (2.25) finder vi, at middelværdien for S er

$$ES = \sum_{s=2}^{12} s f_S(s) = 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + \cdots + 11 \times \frac{2}{36} + 12 \times \frac{1}{36} = 7.$$

Eksempel 1.2 (fortsat) Hvis X betegner den stokastiske variabel, der angiver antallet af rigtige på en *JOKER* række, er sandsynlighedsfunktion f_X for X givet i (2.12) på side 10 og det kan vises, at middelværdien af X er

$$EX = 0.1111111. \tag{2.28}$$

Eksempel 1.3 (fortsat) Hvis X betegner den stokastiske variabel, der angiver antallet af rigtige vindertal på en *LOTTO* række, er sandsynlighedsfunktion f_X for X givet i (2.19) på side 12, og det kan vises, at

$$EX = 7 \times \frac{7}{36} = 1.361111111, \tag{2.29}$$

se Opgave 2.9.

Opgaver

Opgave 2.1
Vis formlerne (2.15), (2.16) og (2.17).

Opgave 2.2
Vis formel (2.18).

Opgave 2.3
Vis ved hjælp af (2.18), at antallet af delmængder af en mængde med n elementer er 2^n.

Opgave 2.4
Et fodboldhold består som bekendt af 11 spillere, én målmand, et antal forsvarsspillere, et antal midtbanespillere og et antal angribere. Forskellige spilsystemer er opkaldt efter fastsættelsen af de tre sidstnævnte antal. For eksempel har et hold, der spiller efter 3-5-2 systemet, 3 forsvarspillere, 5 midtbanespillere og 2 angribere.

Til EM-kvalifikationskampen mod Norge 7. juni 2003 udtog landstræner Morten Olsen 20. maj en bruttotrup på 27 spillere bestående af 3 målmænd, 8 forsvarspillere, 7 midtbanespillere og 9 angribere.

Antag, at Morten Olsen ønsker en startopstilling efter 3-5-2 systemet.

1° På hvor mange måder kan han udtage målmanden?
2° På hvor mange måder kan han udtage de 3 forsvarsspillere?
3° På hvor mange måder kan han udtage de 5 midtbanespillere?
4° På hvor mange måder kan han udtage de 2 angribere?
5° På hvor mange måder kan han udtage de 11 spillere i startopstillingen?

Alternative systemer er 4-4-2, det mere offensive 3-4-3 system og det mere defensive 5-4-1 system.

6° Besvar spørgsmålet i 5° for hvert af disse tre systemer.

Senere blev endelige trup til kampen udtaget. Den bestod af 2 målmænd, 6 forsvarspillere, 7 midtbanespillere og 6 angribere, ialt 21 spillere.

7° Besvar spørgsmålet i 5° for denne trup og Morten Olsens foretrukne system, 3-4-3.

✎ **Opgave 2.5**

1° Vis at

$$EX = \sum_{e \in E} X(e)P(\{e\}). \tag{2.30}$$

2° Vis formlerne (2.26) og (2.27) ved hjælp af (2.30).

✎ **Opgave 2.6**

Antag, at vi kaster en terning 6 gange. Lad X betegne den stokastiske variabel, som angiver antallet af gange, vi har kastet terningen, **inden** den første gang viser et antal øjne, den har vist tidligere. Noteres resultaterne af kastene ned fra venstre mod højre og vi har fået 343551 i de seks kast er $X = 2$, mens $X = 5$, hvis resultatet er 264514, og $X = 6$, hvis terningen viser et forskelligt antal øjne i de seks kast.

1° Gør rede for, at X kun antager værdierne $1, 2, 3, 4, 5, 6$ med positiv sandsynlighed, og vis, at sandsynlighedsfunktionen for X er

$$P(X = x) = \begin{cases} 6^{(x)} x 6^{-(x+1)}, & \text{hvis } x = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 6!6^{-6}, & \text{hvis } x = 6. \end{cases}$$

2° Beregn disse sandsynligheder samt middelværdien af X.

✎ **Opgave 2.7**

På en roulette er der 37 lige store felter nummereret fra 0 til 36. Feltet med nummeret 0 er grønt, mens der er 18 røde felter og 18 sorte felter. Man kan spille på numrene 1 til 36, enten på et enkelt nummer eller på en kombination af visse numre såsom "de lige" $\{2, 4, \ldots, 36\}$, "de ulige" $\{1, 3, \ldots, 35\}$, "de første seks" $\{1, 2, \ldots, 6\}$ og mange andre. Hvis man spiller på en hændelse A med $\#A$ numre, får man for hver indskudt kr. udbetalt en præmie på $36/\#A$ kr., hvis rouletten viser et nummer e som tilhører A; hvis e ikke tilhører A, er pengene tabt. Den stokastiske variabel G, der angiver gevinsten i kr. per indskudt kr., er altså

$$G(e) = \begin{cases} \dfrac{36}{\#A} - 1 & \text{hvis } e \in A \\ -1 & \text{hvis } e \notin A. \end{cases}$$

Vis, idet alle numre på rouletten antages at være lige sandsynlige, at middelværdien af G er

$$EG = -\tfrac{1}{37}.$$

✎ **Opgave 2.8**

Den mest simple form for et væddemål består i at vædde om en hændelse A indtræffer eller ej: Hvis sandsynligheden $p = P(A)$ for A er lille, indtræffer A sjældent og i så tilfælde er det rimeligt, at der udbetales en stor præmie. Omvendt, hvis p er lille, bør præmien være stor. Ofte sættes præmien per indskudt kr. derfor til t/p kr., hvor t er et tal mellem 0 og 1, som betegnes som *tilbagebetalingen*. Det vil sige, at *gevinsten G per indskudt kr.* er den stokastiske variable

$$G(e) = \begin{cases} \dfrac{t}{p} - 1 & \text{hvis } e \in A \\ -1 & \text{hvis } e \notin A. \end{cases}$$

Vis, at middelværdien af G er

$$EG = t - 1.$$

✎ **Opgave 2.9**

Der findes mange andre former for lotto end det omtalt i Eksempel 1.3 på side 2. Antag, at der udtrækkes V vindertal og T tillægstal blandt N numre, hvor $N \geq 2V$. Hvis vi betegner et sådant spil som et $(V,T)/N$ *lotto* er spillet i Eksempel 1.3 altså et (7,2)/36 lotto.

Betragt et $(V,T)/N$ lotto og lad X og Y betegne henholdsvis antallet af rigtige vindertal og rigtige tillægstal på en række.

1° Vis, at sandsynlighedsfunktionen for X er

$$f_X(x) = P(X = x) = \frac{\binom{V}{x}\binom{N-V}{V-x}}{\binom{N}{V}}, \quad x = 0, 1, \ldots, V. \tag{2.31}$$

En stokastisk variabel Z med sandsynlighedsfunktionen

$$f_Z(z) = \frac{\binom{M}{z}\binom{N-M}{n-z}}{\binom{N}{n}}, \quad z = K_0, \ldots, K_1, \tag{2.32}$$

hvor n, M og N hele positive tal, så $M \leq N$ og $n \leq N$, og hvor $K_0 = \max\{0, n+M-N\}$ og $K_1 = \min\{M, n\}$, siges at have en *hypergeometrisk fordeling* med parametre n, M og N som betegnes $h(n, M, N)$. Sandsynligheden i (2.32) kan i *Excel* beregnes ved hjælp af funktionen `HYPERGEOFORDELING`, idet

$$f_Z(z) = \texttt{HYPERGEOFORDELING}(\texttt{z};\texttt{n};\texttt{M};\texttt{N}).$$

Det kan vises, at middelværdien af Z er

$$EZ = n\frac{M}{N}. \tag{2.33}$$

2° Vis, at X har fordelingen $h(V, V, N)$ og at $EX = V\frac{V}{N}$.

3° Vis, at

$$P(X = x, Y = y) = \frac{\binom{V}{x}\binom{T}{y}\binom{N-V-T}{V-(x+y)}}{\binom{N}{V}}, \tag{2.34}$$

hvis $x = 0, 1, \ldots, V$ og $y = 0, 1, \ldots, T$ så $x + y \leq V$.

VIKING LOTTO er et $(6,2)/48$ lotto, som spilles i hele Norden, i Danmark under navnet *ONSDAGS LOTTO*. Der udbetales præmier til rækker med 6 vindertal, 5 vindertal + 1 tillægstal, 5 vindertal, 4 vindertal og 3 vindertal.

4° Lad X betegne antallet af rigtige vindertal på en række i *VIKING LOTTO*. Angiv sandsynlighedsfunktionen for X med 8 decimaler.

5° Hvad er sandsynligheden for at vinde i *VIKING LOTTO?*

6° Besvar spørgsmål 4° og 5° for lottoet i Eksempel 1.3.

3 Lotteri

I dette afsnit finder vi de interessante størrelser i forbindelse med et lotteri, det vil sige sandsynligheden for gevinst, værdien af gevinsten og tilbagebetalingen per indskudt kr. Alle lotterier har en liste over gevinster som i Tabel 1.1 på side 1. Vi antager her, at der er k forskellige præmier og at antallet af i'te præmier er a_i hver med værdi v_i, $i = 1, \dots, k$. Listen over præmier ser altså således ud:

præmie	*antal*	*værdi*
1	a_1	v_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	a_i	v_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	a_k	v_k

For at beregne de relevante størrelser skal vi desuden kende antallet af lodder n og prisen per lod p_L.

I Eksempel 1.1 er $k = 11$, alle a-erne er 1 på nær $a_4 = 2$ og $a_{11} = 3$. Værdien af præmierne fremgår af den sidste søjle i Tabel 1.1, antallet af lodder er $n = 160$ og prisen per lod er $p_L = 20$.

I lotteriet her er det samlede antal præmier

$$a = a_1 + \cdots + a_i + \cdots + a_k, \tag{3.1}$$

og arrangørens udgift til præmier

$$u = a_1 v_1 + \cdots + a_i v_i + \cdots + a_k v_k. \tag{3.2}$$

Da alle n lodder har samme sandsynlighed for at vinde, er sandsynligheden for at vinde en i'te præmie ifølge (2.6) på side 7

$$p_i = P(i\text{'te præmie}) = \frac{a_i}{n}, \quad i = 1, \dots, k. \tag{3.3}$$

Sandsynligheden for at vinde en præmie er

$$\begin{aligned} p = P(\text{præmie}) &= p_1 + \cdots + p_i + \cdots + p_k \\ &= \tfrac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_i + \cdots + a_k) \\ &= \frac{a}{n}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

det vil sige det samlede antal præmier divideret med antallet af lodder.

Bruger vi (2.4) på side 7, finder vi, at sandsynligheden for ikke at vinde er

$$P(\text{ingen præmie}) = 1 - P(\text{præmie}) = \frac{n-a}{n}.$$

Ved hjælp af (2.25) på side 16 finder vi, at den forventede værdi EV af værdien af præmien V er

$$\begin{aligned} EV &= v_1 p_1 + \cdots + v_i p_i + \cdots + v_k p_k \\ &= v_1 \frac{a_1}{n} + \cdots + v_i \frac{a_i}{n} + \cdots + v_k \frac{a_k}{n} \\ &= \tfrac{1}{n}(a_1 v_1 + \cdots + a_i v_i + \cdots + a_k v_k) \\ &= \frac{u}{n}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

hvilket er arrangørens udgift til præmier divideret med antal lodder.

Hvis G betegner gevinsten, det vil sige værdien af præmien minus prisen for lodsedlen, $G = V - p_L$, bliver den forventede gevinst

$$EG = EV - p_L = \frac{u}{n} - p_L. \tag{3.6}$$

Arrangørens fortjeneste ved lotteriet er indtægter minus udgifter, altså

$$F = np_L - u = -nEG. \tag{3.7}$$

Endelig er tilbagebetalingen t i kr. per indskudt kr.

$$t = \frac{u}{np_L} = \frac{EV}{p_L}. \tag{3.8}$$

☞ **Eksempel 1.1 (fortsat)** Ved hjælp af formlerne (3.3) – (3.8) gengiver vi nu beregningerne på side 1. Da $a = 14$ og $n = 160$ fås af (3.4), at sandsynligheden for at vinde en præmie er

$$p = \frac{a}{n} = \frac{14}{160} = 0.0875.$$

og ifølge (3.5) er den forventede værdi af præmien i kr.

$$EV = \frac{u}{n} = \frac{3780}{160} = 23.6250.$$

Da prisen per lod er $p_L = 20$ kr. fås af (3.6) og (3.7), at den forventede gevinst EG og arrangørens fortjeneste F i kr. er

$$EG = EV - p_L = \frac{u}{n} - p_L = 23.6250 - 20 = 3.6250.$$

og

$$F = np_L - u = 160 \times 20 - 3780 = -580.$$

Endelig giver (3.8), at tilbagebetalingen t per indskudt kr. er

$$t = \frac{EV}{p_L} = \frac{23.6250}{20} = 1.18125.$$ ☜

præmie	*antal*	*værdi*
1	12	2000000
2	48	1250000
3	12	500000
4	36	250000
5	48	100000
6	120	50000
7	612	20000
8	1968	10000
9	9600	3000
10	128724	1200

Tabel 3.1: Liste over præmier i Klasselotteriet 2003.

☞ **Eksempel 3.1** På hjemmesiden `www.klasselotteriet.dk` kan man se, at Klasselotteriets historie går tilbage til 29. juni 1753, da Frederik V. gav Det Kongelige Opfostringshus lov til at afholde et lotteri. I 1771 fratog Struensee dem privilegiet, og siden da har lotteriet været ejet af den danske stat.

Klasselotteriet fejrer sit 250 års jubilæum med den største gevinstpulje nogensinde. Listen over præmier i 2003 er gengivet i Tabel 3.1.

Til lotteriet er der ialt $n = 325000$ lodder. Lodderne sælges som Megalodder, der forøger præmien med 50%, Hellodder, Halvlodder, Kvartlodder og Ottendedelslodder for hvilke præmien i listen ganges med henholdsvis 1, 1/2, 1/4 og 1/8. Vi antager her, at samtlige lodder er Hellodder og ser også bort fra statsafgiften på 15% af præmier over 200 kr. Prisen i kr. per Hellod er $p_L = 1536$.

Ved hjælp af (3.1) og (3.2) beregnes det samlede antal præmier og udgiften til lotteriet til

$$a = 141180 \quad \text{og} \quad u = 324988800.$$

Af (3.4) fås, at sandsynligheden for at vinde en præmie er

$$p = \frac{a}{n} = \frac{141180}{325000} = 0.4344.$$

Formel (3.5) giver, at den forventede værdi af præmien (i kr.) er

$$EV = \frac{u}{n} = \frac{324988800}{325000} = 999.9655,$$

og (3.6) medfører, at middelværdien af gevinsten er

$$EG = EV - p_L = -536.0345.$$

Klasselotteriets fortjeneste ved lotteriet findes af (3.7) til

$$F = -nEG = 174211200,$$

og endelig fås det af (3.8) at tilbagebetalingen i kr. per indskudt kr. er

$$t = \frac{EV}{p_L} = 0.6510.$$

I forhold til mange andre spil er såvel sandsynligheden for at vinde som tilbagebetalingen stor i Klasselotteriet ($p = 0.4344$ og $t = 0.6510$). En tilsvarende bemærkning gælder for Varelotteriet i Opgave 3.1.

Opgaver

Opgave 3.1

Af hjemmesiden `www.varelotteriet.dk` fremgår det, at Varelotteriet er Danmarks næststørste lotteri og at det blev oprettet i 1887. Navnet på lotteriet skyldes, at man vandt varer i lotteriet indtil 1989, hvor man gik over til at udbetale præmierne i kontanter. Præmielisten for 233. serie i lotteriet ser således ud:

	hovedgevinster		sidegevinster	
præmie	*antal*	*værdi*	*antal*	*værdi*
1	1	2000000	2	200000
2	1	500000	2	100000
3	6	250000	12	50000
4	6	100000	12	10000
5	10	50000	20	5000
6	20	25000	40	2500
7	20	10000	40	1000
8	200	5000	400	500
9	400	2500	800	350
10	41000	200	82000	100

Tabel 3.2: Præmielisten for 233. serie i Varelotteriet.

Som det ses er der hovedgevinster og sidegevinster. Sidegevinster er på lotterinumre før og efter nummeret på en hovedgevinst. I Varelotteriet er der $n = 205000$ lodsedler a $p_L = 200$ kr.

1° Beregn sandsynligheden for at vinde en præmie i Varelotteriet.

2° Beregn middelværdien af gevinsten i Varelotteriet.

3° Hvor stor er tilbagebetalingen i lotteriet?

Opgave 3.2

Det sønderjydske Lotteri 2002 blev afviklet i perioden 29. juli – 10. oktober 2002. Lotteriet omfattede 213250 girohæfter med 8850000 numre og 150000 løse lodsedler med 1 nummer à 10 kr. Lotteriet tilbød 10 fortløbende numre til 80 kr. og 26 fortløbende numre til 200 kr. Disse rabatter ser vi bort fra her og antager, at samtlige $n = 9000000$ lodder koster $p_L = 10$ kr. per lod. Gevinstlisten ses i Tabel 3.3. Lotteriets hovedgevinst var ”3 på stribe” (250000 + 500000 +

præmie	*antal*	*art*	*værdi*
1	2	Kontanter	500000
2	2	Alfa Romeo 2.0 JTS Lusso	393000
3	3	Kontanter	250000
4	2	Peugeot 307 SW, 2.0	250000
5	4	VW Lupo 3 L	181000
6	180	Gavekort	10000
7	2700	Gavekort	5000
8	2700	Gavekort	2000
9	9000	Gavekort	500

Tabel 3.3: Gevinstliste til Det sønderjydske Lotteri 2000.

250000 kr.). Vi vil her betragte denne som 1 første præmie og 2 tredje præmier.

1° Hvad er sandsynligheden for at vinde en præmie i Det sønderjydske Lotteri 2000?

2° Hvad er middelværdien af gevinsten i lotteriet?

3° Hvor stor er tilbagebetalingen i lotteriet?

4° Hvor stor er sandsynligheden for at vinde en bil i lotteriet?

4 Væddemål

I den mest simple form består et væddemål i, at man satser et vist beløb på at en hændelse indtræffer. Hvis hændelsen indtræffer, får man udbetalt en præmie og hvis ikke er pengene tabt. Antag, at vi satser 1 kr. på at hændelsen A indtræffer og at vi får udbetalt v kr., hvis A indtræffer. Hvis $p = P(A)$ og V er den stokastiske variabel, der angiver værdien af præmien, det vil sige

$$V(e) = \begin{cases} v & \text{hvis } e \in A \\ 0 & \text{hvis } e \in A^C, \end{cases}$$

er middelværdien af værdien af præmien i følge (2.25)

$$EV = v \times p + 0 \times (1 - p) = vp,$$

og middelværdien af gevinsten $G = V - 1$ er dermed i følge (2.26)

$$EG = EV - 1 = vp - 1.$$

Et væddemål siges at være *fair*, hvis middelværdien EG af gevinsten er 0, det vil sige hvis

$$v = \frac{1}{p}.$$

Ved et fair væddemål er den udbetalte præmie altså den reciprokke af sandsynligheden for den betragtede hændelse, det vil sige, at man får en lille præmie udbetalt hvis p er stor og, omvendt, en stor præmie hvis p er lille.

Arrangører af væddemål tager sig imidlertid som oftest betalt for deres ulejlighed og udbetaler

$$o = \frac{t}{p}, \tag{4.1}$$

hvor $t \in [0, 1]$, hvis hændelsen A indtræffer. Tallet t omtales som *tilbagebetalingen*. (t angives som regel i %.) I (4.1) har vi indført betegnelsen o for værdien af præmien, fordi den ofte omtales som *odds* for væddemålet. For sådanne væddemål er den stokastiske variabel O, der angiver værdien af præmien,

$$O(e) = \begin{cases} \frac{t}{p} & \text{hvis } e \in A \\ 0 & \text{hvis } e \in A^C, \end{cases}$$

og middelværdien af gevinsten per indskudt kr. er

$$EG = EO - 1 = \left(\frac{t}{p} \times p + 0 \times (1 - p)\right) - 1 = t - 1.$$

Arrangørens gennemsnitlige fortjeneste per indskudt kr. er

$$F = -EG = 1 - t.$$

4.1 Oddset

☞ **Eksempel 4.1** I dagbladet BT kunne man den 17. juni 2003 se følgende odds for fodboldkampen AGF – Esbjerg, der blev spillet den følgende dag:

AGF – Esbjerg	1	×	2
Tipstjenesten	2.45	3.00	2.45
Expekt	2.50	3.05	2.75
Centrebet	2.65	3.15	3.65
Unibet	2.60	3.35	2.55

Tabel 4.1: Odds i kampen AGF – Esbjerg hos fire firmaer.

Tilbagebetaling

Hvis forskellige firmaer tilbyder det samme væddemål som i Eksempel 4.1, er det naturligvis af interesse at finde det firma, der giver den bedste tilbagebetaling. Vi vil se på en situation, som er mere generel end den i Eksempel 4.1. Antag, udfaldsrummet for et væddemål består af n udfald $e_1, \ldots, e_j, \ldots, e_n$. Lad $o_1, \ldots, o_j, \ldots, o_n$ betegne de odds for de n udfald, som et firma tilbyder, det vil sige, at der udbetales altså o_j kr. per indskudt kr., hvis udfaldet e_j indtræffer. Tilbagebetalingen t og sandsynlighederne p_1, $\ldots$, p_j, $\ldots$, p_n, der lægger til grund for odds, kan beregnes således. Af (4.1) ses, at

$$p_j = t\frac{1}{o_j}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{4.2}$$

og da summen af sandsynlighederne er 1, fås

$$1 = \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} t\frac{1}{o_i} = t\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{o_i}.$$

Dividerer vi begge sider i denne ligning med $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{o_i}$ fås, at tilbagebetalingen er

$$t = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{o_i}}, \tag{4.3}$$

det vil sige, at tilbagebetalingen t er 1 divideret med summen af de reciprokke odds. Indsættes (4.3) i (4.2) finder vi, at

$$p_j = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{o_i}}\frac{1}{o_j} = \frac{\frac{1}{o_j}}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{o_i}}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{4.4}$$

det vil sige, at sandsynligheden for det j'te udfald er det reciprokke odds for det j'te udfald divideret med summen af de reciprokke odds.

☞ **Eksempel 1.5 (fortsat)** Ved hjælp af Tabel 1.3 på side 3 og formlerne (4.3) og (4.4) finder vi tilbagebetalingen t og sandsynlighederne p_1, $p_\times$ og p_2 for henholdsvis 1, $\times$ og 2 i de seks kampe i næstsidste runde af SAS-Ligaen 2002/03 som vist i Tabel 4.2.

Kamp	1	$\times$	2	t (%)	p_1	$p_\times$	p_2
AaB – FCM	2.00	3.35	2.85	87.0031	0.435	0.260	0.305
AB – Farum	2.10	3.30	2.70	86.9873	0.414	0.264	0.332
AGF – Esbjerg	2.45	3.00	2.45	86.9822	0.355	0.290	0.355
Brøndby – FCK	1.95	3.25	3.05	87.0791	0.447	0.268	0.286
OB – Silkeborg	1.50	4.40	3.90	86.9301	0.580	0.198	0.223
Viborg – Køge	1.35	4.10	6.00	86.8576	0.643	0.212	0.145

Tabel 4.2: Tilbagebetaling og sandsynligheder i de seks kampe i næstsidste runde af SAS-Ligaen 2002/03.

For eksempel er tilbagebetalingen i kampen AaB – FCM ifølge (4.3)

$$t = \frac{1}{\frac{1}{2.00} + \frac{1}{3.35} + \frac{1}{2.85}} = 0.870031,$$

så af (4.4) fås, at sandsynlighederne med tre decimalers nøjagtighed er

$$p_1 = \frac{t}{2.00} = 0.435, \quad p_\times = \frac{t}{3.35} = 0.260, \quad p_2 = \frac{t}{2.85} = 0.305.$$

Ud fra tabellen ses, at Dansk Tipstjeneste betaler ca. 87% af pengene tilbage ved et væddemål på en enkelt kamp på *Den Lange*. ☜

☞ **Eksempel 4.1 (fortsat)** Ved hjælp af formlerne (4.3) og (4.4) finder vi at tilbagebetalingen t og sandsynlighederne p_1, $p_\times$ og p_2 for henholdsvis 1, $\times$ og 2 hos de fire firmaer er som vist i Tabel 4.3. Bemærk, at tilbagebetalingen hos *Centrebet* er 103.2214, hvilket

AGF – Esbjerg	1	$\times$	2	t (%)	p_1	$p_\times$	p_2
Tipstjenesten	2.45	3.00	2.45	86.9822	0.355	0.290	0.355
Expekt	2.50	3.05	2.75	91.6166	0.366	0.300	0.333
Centrebet	2.65	3.15	3.65	103.2214	0.390	0.328	0.283
*Centrebet**	2.65	3.15	2.65	93.2682	0.352	0.296	0.352
Unibet	2.60	3.35	2.55	92.9991	0.358	0.278	0.365

Tabel 4.3: Tilbagebetalingen og sandsynlighederne i kampen AGF – Esbjerg hos de fire firmaer.

næsten er for godt til at være sandt. Et besøg på *Centrebet*'s hjemmeside afslører da også at odds for et 2-tal er 2.65, og altså ikke som angivet i BT 3.65. De korrigerede tal findes i linjen *Centrebet** i tabellen. Selv med disse tal fremstår *Centrebet* bedømt ud fra kampen AGF – Esbjerg som det firma, der har den højeste tilbagebetaling.

4.2 Kombination af væddemål

Ofte indgår man væddemål ikke blot om udfaldet af en enkelt begivenhed men om udfaldet af flere begivenheder af samme art. Vi bruger igen kampene i næstsidste runde af SAS-Ligaen 2002/03 til at illustrere situationen. For overskuelighedens skyld gengiver vi her Tabel 1.3 med odds for de seks kampe, men her suppleret med numrene for kampene i Tipstjenestens program.

Nr.	Kamp	1	$\times$	2
17	AaB – FC Midtjylland	2.00	3.35	2.85
18	AB – Farum	2.10	3.30	2.70
19	AGF – Esbjerg	2.45	3.00	2.45
20	Brøndby – FC København	1.95	3.25	3.05
21	OB – Silkeborg	1.50	4.40	3.90
22	Viborg – Køge	1.35	4.10	6.00

Tabel 4.4: Odds for de seks kampe (Nr. 17 – 22 Tipstjenestens program) i næstsidste runde af SAS-Ligaen 2002/03.

Tipstjenesten tilbyder på *Den Lange* mulighed for at spille på udfaldet af flere kampe samtidigt. Et væddemål på *Den Lange* skal indeholde mindst 2 kampe og højest 15 kampe. Når man skal beregne odds for et væddemål bestående af flere kampe, antages det, at udfaldene af kampene er uafhængige af hinanden i følgende forstand:

Definition 4.1 *Hændelserne $A_1, \ldots, A_n$ er uafhængige af hinanden, hvis sandsynligheden for at at vilkårlige 2, 3, . . . eller n indtræffer samtidigt er produktet af sandsynlighederne for de enkelte hændelser.*

Bemærkning 4.1 Lad os se på en præcis matematisk formulering af begrebet uafhængighed af hændelser. Lad $A_1, \ldots, A_n$ være n hændelser. Hvis vi betragter dem alle gælder der ifølge Definition 4.1, at

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdots P(A_n),$$

men ikke nok med det. Også hvis vi kun betragter j af de n hændelser, skal sandsynligheden for at de indtræffer samtidigt være produktet af sandsynlighederne. Det vil sige, hvis blot betragter j hændelser $A_{i_1}, \ldots, A_{i_j}$ blandt de n hændelser $A_1, \ldots, A_n$ skal der gælde at

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_j}), \tag{4.5}$$

for alle $\{i_1, \ldots, i_j\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, $j = 2, \ldots, n$.

(Hvis f.eks. $n = 3$, er betingelsen i (4.5) en kort skrivemåde for fire betingelser, nemlig:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2), P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3), P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$$

og

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3).)$$

❏

☞ **Eksempel 1.4 (fortsat)** Antag lidt urealistisk, at det for tipskuponen side 3 gælder, at for alle de 12 kampe på tipskuponen er de tre tegn 1, × og 2 lige sandsynlige, så sandsynligheden er ⅓ for hvert af de tre tegn. Uanset hvordan de 12 kampe på kuponen ender, har vi derfor en sandsynlighed på ⅓ for at tippe rigtigt og en sandsynlighed på ⅔ for at tippe forkert i en bestemt kamp. Lad X betegne antallet af rigtige på tipskuponen. Antager vi, at udfaldene af de 12 kampe er uafhængige af hinanden, bliver sandsynlighedsfunktionen for X

$$f_X(x) = P(X = x) = \binom{12}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{12-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, 12. \tag{4.6}$$

Da kampene er uafhængige, skal sandsynlighederne i de 12 kampe ganges sammen, så $\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{12-x}$ er sandsynligheden for at én række har x rigtige og $12 - x$ forkerte tegn, mens $\binom{12}{x}$ angiver antallet af rækker med x rigtige.

Bemærkning 4.2 Hvis n er et helt positivt tal og $p \in [0, 1]$, siges en stokastisk variabel Z med sandsynlighedsfunktion

$$P(Z = z) = \binom{n}{z} p^z (1-p)^{n-z}, \quad z = 0, 1, , \ldots, n, \tag{4.7}$$

at være *binomial fordelt* med *antalsparameter* n og *sandsynlighedsparameter* p. Fordelingen betegnes $b(n, p)$.

Verbalt kan fordelingen beskrives således. Antag, at vi i hvert af n uafhængige spil har sandsynligheden p for at vinde og $1 - p$ for at tabe. Hvis Z betegner antallet af gange, vi vinder i de n spil, har Z fordelingen $b(n, p)$.

Sandsynligheden i (4.7), der betegnes $b(z; n, p)$, kan i *Excel* beregnes på følgende måde:

$$b(z; n, p) = \texttt{BINOMIALFORDELING}(\texttt{z}; \texttt{n}; \texttt{p}; \texttt{FALSK}). \tag{4.8}$$

Det vises i Opgave 4.2, at hvis Z er $b(n, p)$-fordelt, da er middelværdien af Z

$$EZ = np. \tag{4.9}$$

❏

☞ **Eksempel 1.4 (fortsat)** Af (4.6) og (4.7) ses det, at X er $b(12, ⅓)$-fordelt, og (4.9) medfører, at middelværdien af X er $EX = 4$.

☞ **Eksempel 1.5 (fortsat)** Antag, at vi vil spille på henholdsvis $\times$, 1 og 1 i kampene 19, 20 og 21 i Tabel 4.4 på side 28. Da udfaldene af kampene er uafhængige er

$$\begin{aligned} p_{19,20,21}(\times,1,1) &= P(\times \text{ i } 19, 1 \text{ i } 20, 1 \text{ i } 21) = P(\times \text{ i } 19)P(1 \text{ i } 20)P(1 \text{ i } 21) \\ &= p_{19}(\times)p_{20}(1)p_{21}(1), \end{aligned} \tag{4.10}$$

så hvis tilbagebetalingen t er 1 fås det af (4.1), at odds for det kombinerede væddemål er

$$\begin{aligned} o_{19,20,21}(\times,1,1) &= \frac{1}{p_{19,20,21}(\times,1,1)} = \frac{1}{p_{19}(\times)p_{20}(1)p_{21}(1)} \\ &= \frac{1}{p_{19}(\times)}\frac{1}{p_{20}(1)}\frac{1}{p_{21}(1)} = o_{19}(\times)o_{20}(1)o_{21}(1) \end{aligned}$$

det vil sige, at *odds for det kombinerede væddemål er produktet af odds for de enkelte væddemål*. Denne formel

$$o_{19,20,21}(\times,1,1) = o_{19}(\times)o_{20}(1)o_{21}(1) \tag{4.11}$$

benyttes også hvis tilbagebetalingen $t < 1$. Vi har da fra (4.1), at

$$\begin{aligned} o_{19,20,21}(\times,1,1) &= o_{19}(\times)o_{20}(1)o_{21}(1) = \frac{t}{p_{19}(\times)}\frac{t}{p_{20}(1)}\frac{t}{p_{21}(1)} \\ &= \frac{t^3}{p_{19,20,21}(\times,1,1)}, \end{aligned}$$

det vil sige, at tilbagebetalingen for en kombination af tre væddemål er t^3, tilbagebetalingen for de enkelte væddemål t opløftet til tredje potens. I eksemplet her finder vi af Tabel 4.4 og (4.11), at

$$o_{19,20,21}(\times,1,1) = 3.00 \times 1.95 \times 1.50 = 8.775,$$

som afrundes nedad til 8.77, idet Tipstjenesten altid angiver odds med 2 decimaler. ☝

Eksemplet ovenfor er et specialtilfælde af følgende generelle situation. Antag, at vi ønsker at spille på en kombination af k væddemål, hvor det i'te har udfaldene $e_{i1}, \dots, e_{ij}, \dots, e_{in_i}$ med sandsynligheder $p_i(e_{i1}), \dots, p_i(e_{ij}), \dots, p_i(e_{in_i})$, $i = 1, \dots, k$. (Hvis vi i eksemplet ovenfor nummererer kampene med 1, 2 og 3 i stedet for 19, 20 og 21, er $k = n_1 = n_2 = n_3 = 3$, $e_{11} = e_{21} = e_{31} = 1$, $e_{12} = e_{22} = e_{32} = \times$, og $e_{13} = e_{23} = e_{33} = 2$.)

Udfaldene i de k væddemål antages at være uafhængige, så hvis vi satser på udfaldet e_{1j_1} i det første væddemål, $\cdots$, e_{ij_i} i det i'te væddemål, $\dots$, e_{kj_k} i det k'te væddemål (i eksemplet er $e_{1j_1} = \times$, $e_{2j_2} = 1$ og $e_{3j_3} = 1$), er sandsynligheden for at vi vinder

$$p_{1,\dots,i,\dots,k}(e_{1j_1}, \dots, e_{ij_i}, \dots, e_{kj_k}) = p_1(e_{1j_1}) \cdots p_i(e_{ij_i}) \cdots p_k(e_{kj_k}). \tag{4.12}$$

Er tilbagebetalingen t den samme i de k væddemål, det vil sige, hvis

$$o_i(e_{ij_i}) = \frac{t}{p_i(e_{ij_i})}, \quad i = 1, \dots, k,$$

er vores *odds i det kombinerede væddemål produktet af odds i de enkelte væddemål*

$$o_{1,\ldots,i,\ldots,k}(e_{1j_1},\ldots,e_{ij_i},\ldots,e_{kj_k}) = o_1(e_{1j_1})\cdots o_i(e_{ij_i})\cdots o_k(e_{kj_k}) = \frac{t^k}{p_{1,\ldots,i,\ldots,k}(e_{1j_1},\ldots,e_{ij_i},\ldots,e_{kj_k})}. \tag{4.13}$$

Tilbagebetalingen i det kombinerede væddemål er altså t^k, og da t (næsten) altid er mindre end 1, er tilbagebetalingen altså (næsten) altid størst ved blot et enkelt væddemål.

4.3 Systemspil

Hvis man er interesseret i ikke bare at spille ét kombineret væddemål men flere kombinerede væddemål, kan dette ofte gøres bekvemt ved hjælp af systemer. Dette illustrerer vi nu ved hjælp af systemspil på *Den Lange*. Her findes der i alt 12 systemspil heriblandt spillet "3 ud af 4", som kort betegnes "3/4". I dette spil vinder man, når 3 ud af 4 kampe er rigtige. Ønsker man for eksempel at spille 1 i kamp 17 i Tabel 4.4 på side 28, $\times$ i kamp 19, 1 i kamp 20 og 1 i kamp 22 gøres dette ved på kuponen til *Den Lange* at afkrydse disse tegn på følgende måde:

Nr.	Kamp	1	×	2
17	AaB – FC Midtjylland	×		
19	AGF – Esbjerg		×	
20	Brøndby – FC København	×		
21	OB – Silkeborg	×		

Disse 4 kombinationer af væddemål udskrives således:

Kamp nr.	1	2	3	4	*odds*
	1	×	1		11.70
	1	×		1	9.00
	1		1	1	5.85
		×	1	1	8.77

Odds (med 2 decimaler) beregnes ud fra odds i Tabel 4.4. Eksempelvis er odds for den første kombination

$$2.00 \times 3.00 \times 1.95 = 11.70.$$

Prisen for de 4 kombinationer af væddemål skal være den samme. Tipstjenesten udbetaler kun *hele beløb i kroner* og *afrunder nedad for hvert væddemål*. Har man således betalt mindsteprisen på 10 kr. per kombination, i alt 40 kr. og alle 4 kampe er rigtige, udbetales følgende beløb i kr.:

$$(11.70 + 9.00 + 5.85 + 8.77) \times 10 \downarrow 117 + 90 + 58 + 87 = 352.$$

(Her og i resten af hæftet betyder ↓ afrunding nedad.)
Hvis eksempelvis 1-tallet i Kamp. nr 3 (Kamp nr. 20 i programmet) er forkert, får man udbetalt $9.00 \times 10 = 90$ kr. Er 2 kampe tippet forkert, har man ikke 3 rigtige på nogen af kombinationer og får derfor ingen præmie.

De øvrige 11 spilsystemer på *Den Lange* er $2/3$ ("2 ud af 3"), $2/4, 2/5, 2/6, 3/5, 3/6, 4/5, 4/6, 5/6, 5/7$ og $6/7$. Systemet y/x har i alt $\binom{x}{y}$ kombinationer af y væddemål. Sættes Tipstjenestens tilbagebetaling til 0.87 er tilbagebetalingen for hver kombination af y væddemål 0.87^y.

4.4 Hestevæddemål

I spil på hestevæddeløb opererer man sædvanligvis med *løbende odds* , det vil sige odds, der beregnes ud fra spillernes samlede indsats på de forskellige heste i løbet. Dette er i modsætning til for eksempel spil på *Den Lange*, hvor Tipstjenesten fastsætter odds, se Afsnit 4.1 på side 26. Spil med løbende odds kaldes ofte *totalisatorspil*, mens spil med *faste odds* omtales som *bookmakerspil*.

Der findes forskellige former af spil på hestevæddeløb, blandt andet spillet *Vinder*, hvor der væddes på, hvilken hest der kommer først i mål.

☞ **Eksempel 4.2** Tabel 4.5 vedrører *Vinder* spillet i 6. løb på Jydsk Væddeløbsbane den 18. september 2003, hvor der for hver hest i løbet er angivet spillernes samlede indsats på hesten og odds. (I de sidste ti minutter inden løbet start kan man på fjernsynsskærme se hvordan odds opdateres, når spillerne gør deres indsatser.)

Nr.	*Hest*	*Beløb*	*Odds*
1	Gipsy Attack	udgået	—
2	Flying Hawk	440	41.74
3	Gratie C	2279	8.05
4	Farandol Østerkær	4502	4.07
5	Go For It Quick	7025	2.61
6	Facet	1090	16.84
7	Ginger Country	770	23.85
8	Funny Creeper	2171	8.45
9	Von Skotland	2563	7.16
10	Day Spring	1814	10.12
11	Sharif Lemo	303	60.61
Sum		22957	

Tabel 4.5: Indsatser og odds i *Vinder* spillet i 6. løb på Jydsk Væddeløbsbane den 18. september 2003.

For at illustrere hvorledes odds beregnes, betragter vi et løb med k heste, hvor det samlede beløb, der er spillet på hest h_i er b_i, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Nr.	*Hest*	*Beløb*	*Sandsynlighed*	*Odds*
1	h_1	b_1	$p_1 = b_1/b.$	$o_1 = tb./b_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	h_i	b_i	$p_i = b_i/b.$	$o_i = tb./b_i$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	h_k	b_k	$p_k = b_k/b.$	$o_k = tb./b_k$
Sum		$b.$	1	

Det samlede beløb, der er spillet for, er $b. = b_1 + \cdots + b_i + \cdots + b_k$. Vurderet ud fra spillernes indsatser er sandsynligheden for at hest h_i vinder

$$p_i = \frac{b_i}{b.}, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Hvis tilbagebetalingen per indskudt krone er $t = 1 - a$, hvor a er travbanens andel per indskudt krone, finder vi ved hjælp af formel (4.1) på side 25, at odds er

$$o_i = \frac{t}{p_i} = \frac{tb.}{b_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

der angives med to decimaler.

Odds i Tabel 4.5 fremkommer ved at Jydsk Væddeløbsbanes andel er $a = 0.2$. Løbet blev vundet af Farandol Østerkær til odds 4.07. 👍

I spillet *Plads* væddes der på, hvilke heste der placerer sig som 1 eller 2 i løbet, hvis dette har 6 eller færre deltagere. Hvis løbet har flere deltagere, væddes der på hvilke heste, der bliver 1, 2 eller 3 i løbet.

☞ **Eksempel 4.3** I 6. løb på Jydsk Væddeløbsbane den 18. september 2003, som vi betragtede ovenfor i Eksempel 4.2, blev placeringen 4, 9 og 2. I Tabel 4.6 ses beløbene, der spillet på de enkelte heste i spillet *Plads*, samt odds for de tre heste, der placerede sig på de første tre pladser.

Odds beregnes således: Da væddeløbsbanens andel er 0.2, er præmiepuljen i kr.

$$0.8 \times 18183 = 14546.$$

Gevinstpuljen, det vil sige præmiepuljen minus den samlede indsats på de tre placerede heste, her

$$14546 - (380 + 3216 + 2004) = 8946,$$

fordeles ligeligt mellem de tre heste, her med $8946/3 = 2982$ til hver, så gevinsten per indskudt krone er for hver af de tre heste

$$\frac{2982}{indskud},$$

Nr.	*Hest*	*Beløb*	*Odds*
1	Gipsy Attack	udgået	—
2	Flying Hawk	380	8.84
3	Gratie C	1814	
4	Farandol Østerkær	3216	1.92
5	Go For It Quick	3399	
6	Facet	1113	
7	Ginger Country	598	
8	Funny Creeper	3261	
9	Von Skotland	2004	2.48
10	Day Spring	1938	
11	Sharif Lemo	460	
Sum		18183	

Tabel 4.6: Indsatser og odds i *Plads* spillet i 6. løb på Jydsk Væddeløbsbane den 18. september 2003.

og dermed bliver odds for hver af de tre heste

$$odds = \frac{2982}{indskud} + 1 = \frac{2982 + indskud}{indskud}.$$

Beregningerne er resumeret i tabellen nedenfor.

Nr.	*Hest*	*indskud*	*gevinst+indskud*	*Odds*
2	Flying Hawk	380	3363	8.84
4	Farandol Østerkær	3216	6198	1.92
9	Von Skotland	2004	4986	2.48
Sum		5600	14546	

Opgaver

Opgave 4.1

Betragt spillet i Eksempel 2.2 på side 8 og lad R og B være de stokastiske variable, der angiver antallet af øjne på henholdsvis den røde og den blå terning.

1° Vis, at det for $r, b = 1, \ldots, 6$ gælder, at hændelserne $\{R = r\}$ og $\{B = b\}$ er uafhængige.

Lad S angive summen af øjnene på de to terninger.

2° For hvilke $s = 2, \ldots, 12$ er hændelserne $\{R = 1\}$ og $\{S = s\}$ uafhængige?

Opgave 4.2

Antag, at Z er $b(n, p)$-fordelt. Betragt den verbale beskrivelse af fordelingen i Bemærkning 4.2 på side 29 og lad $Y_i = 1$ hvis vi vinder det $i$te spil og 0 ellers.

1° Vis, at

$$Z = Y_1 + \cdots + Y_i + \cdots + Y_n, \tag{4.14}$$

hvor Y_i er $b(1, p)$-fordelt, $i = 1, \ldots, n$.

2° Vis, at $EY = p$, hvis Y er $b(1, p)$-fordelt.

3° Vis ved hjælp af 1°, 2° og formel (2.27) på side 16, at

$$EZ = np.$$

✎ **Opgave 4.3**

Betragt systemspillet "y ud af x" på *Den Lange*.

1° Hvad er antallet af kombinerede væddemål i spillet?

Antag, at z af de y kampe er rigtige.

2° Hvor mange kombinationer giver så præmie?

✎ **Opgave 4.4**

Antag, at vi spiller 10 kr. per væddemål i spillet "2 ud af 5" og tipper $\times$, 2, $\times$, 1, 1 i kampene 17 – 21 i Tabel 4.4 på side 28.

1° Hvor mange kombinerede væddemål spiller vi på?

Kampene endte med tegnene 1, 2, $\times$, 2, 1.

2° Hvor stor er den samlede præmie?

3° Hvor stor er gevinsten?

✎ **Opgave 4.5**

Antag, at vi satser 10 kr. per væddemål i spillet "3 ud af 6" og tipper $\times$, 2, $\times$, 1, 1, 1 i kampene 17 – 22 i Tabel 4.4 på side 28.

1° Hvad koster spillet?

Kampene endte med tegnene 1, 2, $\times$, 2, 1, 1.

2° Hvor stor er gevinsten?

✎ **Opgave 4.6**

Ofte optræder en kamp som i tabellen nedenfor to gange på *Den Lange*, anden gang med tilføjelsen (0-1), som angiver at man antager, at stillingen er 0-1 ved kampens start.

Kamp	1	$\times$	2
A – B	o_1	$o_\times$	o_2
A – B (0-1)	o_1^*	$o_\times^*$	o_2^*

Tegnet er 1, $\times$ eller 2 i kampen A – B (0-1), hvis henholdsvis A vinder med mindst to mål, A vinder med ét mål eller A spiller uafgjort eller taber. Odds omtales i denne situation ofte som *handicap* odds.

1° Vis, at der er følgende sammenhæng mellem odds o_1, $o_\times$ og o_2 i kampen A – B og odds o_1^*, $o_\times^*$ og o_2^* i kampen A – B (0-1):

$$o_2^* = \frac{1}{\dfrac{1}{o_\times} + \dfrac{1}{o_2}}$$

og

$$o_1 = \frac{1}{\dfrac{1}{o_1^*} + \dfrac{1}{o_\times^*}}.$$

2° Illustrer sammenhængen ved hjælp af odds fra landskampen Danmark – Finland den 20. august 2003:

Kamp	1	$\times$	2
Danmark – Finland	1.35	3.70	7.25
Danmark – Finland (0-1)	2.20	3.50	2.45

✎ **Opgave 4.7**

Tabel 4.7 viser de beløb, der blev spillet for i spillene *Vinder* og *Plads* i 7. løb på Jydsk Væddeløbsbane 18. september 2003.

Nr.	*Hest*	*Beløb (Vinder)*	*Beløb (Plads)*
1	Fair Finans	470	578
2	Go'dante	5935	2377
3	Ego Kongshøj	1497	1300
4	Høkeren	8522	2654
5	Evita Elkær	200	690
6	Elli N B	160	300
7	Fitou Earth	3904	2933
8	Emmeline Blue	280	490
9	Fulton	500	510
10	Åksebro Virvel	2292	1284
11	Emma Brise	140	50
12	Julia Palema	426	490
Sum		24326	13656

Tabel 4.7: Spillede beløb i *Vinder* og *Plads* i 7. løb.

Placeringen blev 4, 2 og 12.

1° Beregn odds i spillet *Vinder*.

2° Beregn odds i spillet *Plads*.

5 Beregning af præmier

I visse spil, som for eksempel *Tips 12*, *Tips 13*, *JOKER* og *LOTTO*, afhænger præmiens størrelse af både antallet af spillede rækker og antallet af rækker med gevinst. Præmiepuljen i disse spil er på 45% af omsætningen, så Tipstjenestens andel er 55%. I andre spil, for eksempel spil på hestevæddeløb, afhænger præmien foruden af den samlede indsats af beløbene, der er spillet på de enkelte heste. I spil på heste udgør præmiepuljen 80% af omsætningen. Endelig er der spil, som for eksempel *Den Lange*, hvor præmien kun afhænger af den enkelte spillers indsats og Tipstjenestens andel.

I Danmark betales der en statsafgift i forbindelse med spil. For eksempel betales der i spillene *Tips 12*, *Tips 13*, *JOKER* og *LOTTO* en afgift til staten på 15% af den del af præmien, der overstiger 200 kr. I spil hvor der beregnes odds, optræder afgiften typisk som en del af arrangørens andel a af den samlede omsætning, så den udbetalte præmie kan beregnes som odds ganget med indskuddet. I spil på heste, hvor tilbagebetalingen t er 80%, får staten 11% af omsætningen mens væddeløbsbanen beholder de resterende 9%.

5.1 Eksempler

I dette afsnit giver vi forskellige eksempler på beregning af præmier. Alle beregninger foretages i kr. og $\downarrow$ antyder beløb, der afrundes nedad.

☞ **Eksempel 1.4 (fortsat)** I uge 31 i 2003 var de rigtige tegn i *Tips 12*

$$2-\times-2-2-\times-1-1-1-1-2-1-1$$

så i rækken i Tabel 1.2 på side 3 var der 5 rigtige.

Omsætningen var 1662464, så det samlede beløb til præmier er $0.45 \times 1662464 = 748108.80$, som fordeles ligeligt til præmiepuljer for rækker med 12, 11 og 10 rigtige, det vil sige med $748108.80/3 = 249369.60$ til hver pulje. Der var 738 rækker med 11 rigtige, så bruttopræmien for hver af disse rækker er

$$249369.60/738 = 337.899187 \downarrow 337.89,$$

der som antydet afrundes nedad. Statsafgiften er

$$(337.89 - 200) \times 0.15 = 20.68,$$

så idet præmier udbetales i hele krone beløb, er præmien til rækker med 11 rigtige

$$337.89 - 20.68 = 317.21 \downarrow 317.$$

Beregningen er gengivet i Tabel 5.1 som også viser præmierne til rækker med 12 og 10 rigtige.

	Rækker	*Præmiepulje*	*Bruttopræmie*	*Statsafgift*	*Præmie*
12	34	249369.60	7334.40	1070.16	6264
11	738	249369.60	337.89	20.68	317
10	6340	249369.60	39.33	0.00	39

Tabel 5.1: Beregning af præmier i *Tips 12* i uge 31 i 2003.

I *Tips 13* er der præmier til rækker med 13, 12, 11 og 10 rigtige og det samlede beløb til præmier, det vil sige 45% af omsætningen, fordeles til præmiepuljer med henholdsvis 30%, 20%, 20% og 30% til 13, 12, 11 og 10 rigtige. I uge 31 i 2003 var omsætningen 2465072 kr. Beregningen af præmierne er gengivet i Tabel 5.2.

	Rækker	*Præmiepulje*	*Bruttopræmie*	*Statsafgift*	*Præmie*
13	0	332784.72	—	—	—
12	5	221856.48	44371.29	6625.69	37745
11	88	221856.48	2521.09	348.16	2172
10	890	332784.72	373.91	26.09	347

Tabel 5.2: Beregning af præmier i *Tips 13* i uge 31 i 2003.

Eksempelvis beregnes præmien til de 5 rækker med 12 rigtige således. Præmiepuljen er

$$2465072 \times 0.45 \times 0.20 = 221856.48,$$

så bruttopræmien bliver

$$221856.48/5 = 44371.296 \downarrow 44371.29.$$

Statsafgiften heraf er

$$(44371.29 - 200) \times 0.15 = 6625.69,$$

så præmien rækker med 12 rigtige er

$$44371.29 - 6625.69 = 37745.60 \downarrow 37745.$$

☞ **Eksempel 1.2 (fortsat)** I *JOKER* fordeles det samlede beløb til præmier, det vil sige 45% af omsætningen, med henholdsvis 40%, 10%, 10%, 10%, 10% og 20% til rækker med 7, 6, 5, 4, 3 og 2 rigtige. I uge 31 i 2003 var omsætningen 9157900. Beregningen af præmierne ses i Tabel 5.3.

	Rækker	*Præmiepulje*	*Bruttopræmie*	*Statsafgift*	*Præmie*
7	0	1648422.00	—	—	—
6	1	412105.50	412105.50	61785.83	350319
5	13	412105.50	31700.42	4725.06	26975
4	152	412105.50	2711.22	376.68	2334
3	1648	412105.50	250.06	7.51	242
2	16565	824211.00	49.76	0.00	49

Tabel 5.3: Beregning af præmier i *JOKER* i uge 31 i 2003.

Eksempelvis beregnes præmien til de 16565 rækker med 2 rigtige således: Præmiepuljen til rækker med 2 rigtige er

$$9157900 \times 0.45 \times 0.20 = 824211,$$

så bruttopræmien bliver

$$824211/16565 = 49.756173 \downarrow 49.75.$$

Da dette beløb er under 200, er statsafgiften 0.00, så præmien til 2 rigtige er 49.75 $\downarrow$ 49.

☞ **Eksempel 1.3 (fortsat)** I *LOTTO* fordeles det samlede beløb til præmier, det vil sige 45% af omsætningen, med henholdsvis 25%, 9%, 7%, 11%, og 48% til rækker med 7, 6+1, 6, 5, og 4 rigtige. I uge 31 i 2003 var omsætningen 52295334, så beregningen af præmierne var:

	Rækker	*Præmiepulje*	*Bruttopræmie*	*Statsafgift*	*Præmie*
7	2	5883225.08	2941612.53	441211.88	2500400
6+1	31	2117961.03	68321.32	10218.20	58103
6	497	1647303.02	3314.49	467.17	2847
5	21316	2588619.03	121.44	0.00	121
4	310816	11295792.14	36.34	0.00	36

Tabel 5.4: Beregning af præmier i *LOTTO* i uge 31 i 2003.

Eksempelvis beregnes præmien til de 31 rækker med 6 rigtige vindertal og 1 rigtigt tillægstal således. Præmiepuljen til $6+1$ rigtige er

$$52295334 \times 0.45 \times 0.09 = 2117961.03,$$

så bruttopræmien er

$$2117961.03/31 = 68321.323548 \downarrow 68321.32,$$

hvoraf statsafgiften er

$$(68321.32 - 200) \times 0.15 = 10218.20.$$

Præmien til $6 + 1$ rigtige bliver derfor

$$68321.32 - 10218.20 = 58103.12 \downarrow 58103.$$

☞ **Eksempel 4.2 (fortsat)** Antag, at vi i 6. løb på Jydsk Væddeløbsbane den 18.9 2003 havde spillet 100 kr. i spillet *Vinder* på vinderen Farandol Østerkær. Af Tabel 4.5 på side 32 ses at odds for hesten er 4.07, så den udbetalte præmie er 4.07×100 kr. $= 407$ kr.

☞ **Eksempel 4.3 (fortsat)** Antag, at vi i 6. løb på Jydsk Væddeløbsbane den 18.9 2003 havde spillet 250 kr. i spillet *Plads* på vinderen Farandol Østerkær. Af Tabel 4.6 på side 34 ses at odds for hesten er 1.92, så den udbetalte præmie er 1.92×250 kr. $= 480$ kr.

Eksempler på beregning af præmier i spillene ″2 ud af 5″ og ″3 ud af 6″ findes i Opgave 4.4 og Opgave 4.5 på side 35.

5.2 Spillerens dilemma

Alle spillere er naturligvis interesseret i at vinde ″den store gevinst″. I spil med odds er spillerens dilemma illustreret ved formel (4.1),

$$o = \frac{t}{p},$$

som viser, at man for at opnå en stor præmie o skal spille på en hændelse med en lille sandsynlighed p, det vil sige på en hændelse, der sjældent indtræffer. Denne indlysende sammenhæng gælder for alle spil uden den dog lægger en dæmper på spillelysten. Med andre ord, håbet om at vinde den store gevinst overskygger ofte den kendsgerning at chancen for at vinde gevinsten er meget lille.

☞ **Eksempel 1.2 (fortsat)** I uge 31 i 2003 var omsætningen i *JOKER* 9157900 kr. og af Tabel 5.3 fremgår, at præmiepuljen til rækker med 7 rigtige var 1648422 kr., så efter skat var præmien til en enkelt række med 7 rigtige i kr.

$$1648422 - (1648422 - 200) \times 0.15 \downarrow 1401188.$$

Prisen for en række i *JOKER* er 10 kr., så i uge 31 blev der spillet 915790 rækker. Af formel (2.12) ses, at sandsynligheden for 7 rigtige er så lille som

$$p = 10^{-7} = 0.0000001.$$

Men ikke nok med det. Hvis en bestemt spiller skal have den store gevinst på 1401188 kr., det vil sige være alene om at have 7 rigtige, må der ikke være 7 rigtige på de øvrige 915789 rækker der blev spillet. Sandsynligheden for dette er

$$p(1-p)^{915789} = 0.0000000912,$$

det vil sige blot ca. 9 divideret med 100000000 (100 millioner).

Opgaver

✎ Opgave 5.1

I *Tips 12* i uge 40 i 2003 var omsætningen 1903002 kr. Antallet af rækker med henholdsvis 12, 11 og 10 rigtige var 0, 14 og 261. Beregn størrelsen af præmierne.

✎ Opgave 5.2

I *Tips 13* i uge 40 i 2003 var omsætningen 33242303 kr. Antallet af rækker med henholdsvis 13, 12, 11 og 10 rigtige var 10, 201, 2190 og 15128. Beregn størrelsen af præmierne.

✎ Opgave 5.3

I ugerne 36, 37, 38 og 39 var der ingen rækker med 7 rigtige i *JOKER*. Præmiepuljen til rækker med 7 rigtige fra disse fire uger, kaldet *Jackpot* puljen, overføres derfor til puljen for 7 rigtige i uge 40. I uge 40 i 2003 var omsætningen 13283910 kr. og Jackpot puljen var 6074938.80 kr.

1° Antag, at der i uge 40 kun var én række med 7 rigtige og beregn præmien.

Antallet af rækker med henholdsvis 7, 6, 5, 4, 3 og 2 rigtige i uge 40 var 3, 1, 18, 232, 2284 og 24065.

2° Beregn størrelsen af præmierne.

✎ Opgave 5.4

I *LOTTO* forhøjes præmiepuljen til rækker med 7 rigtige vindertal undertiden med et beløb, der stammer fra Ørefonden, som fremkommer ved, at Tipstjenesten i beregninger af præmier altid afrunder tal nedad. Forskellen mellem præcist beregnede og udbetalte præmier akkumuleres i Ørefonden, som så lejlighedsvis bruges til at forhøje præmiepuljen med. I uge 40 i 2003 var omsætningen 76954281 kr. og puljen til 7 rigtige blev forhøjet med 10588235.30 kr. Antallet af rækker med henholdsvis 7, 6+1, 6, 5 og 4 rigtige var 0, 44, 504, 23171 og 366326. Beregn størrelsen af præmierne.

✎ Opgave 5.5

Antag, at vi har spillet 100 kr. i *Vinder* og 500 kr. i *Plads* på Julia Palema i 7. løb på Jydsk Væddeløbsbane den 18.9 2003. Beregn den samlede præmie ud fra oplysningerne i Opgave 4.7 på side 36.

Facitliste til alle opgaver

Opgave 2.1 Formel (2.15):

$$\binom{n}{n-x} = \frac{n!}{(n-x)!(n-(n-x))!} = \frac{n!}{(n-x)!x!} = \frac{n!}{x!(n-x)!} = \binom{n}{x}$$

Formel (2.16):

$$\begin{aligned}\binom{n}{x} &= \frac{n!}{x!(n-x)!} \\ &= \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-x+1) \times (n-x) \times \cdots \times 1}{x! \times (n-x) \times (n-x-1) \times \cdots \times 1} \\ &= \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-x+1)}{x!} = \frac{n^{(x)}}{x!}\end{aligned}$$

Formel (2.17):

$$\begin{aligned}\binom{n}{x} + \binom{n}{x-1} &= \frac{n!}{x!(n-x)!} + \frac{n!}{(x-1)!(n-(x-1))!} \\ &= \frac{n!}{(x-1)!(n-x)!}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{n-(x-1)}\right) \\ &= \frac{n!}{(x-1)!(n-x)!}\left(\frac{n-(x-1)+x}{x(n-(x-1))}\right) \\ &= \frac{n!}{(x-1)!(n-x)!}\left(\frac{n+1}{x(n-(x-1))}\right) \\ &= \frac{(n+1)!}{x!((n+1)-x)!} = \binom{n+1}{x}\end{aligned}$$

Opgave 2.2

$$(a+b)^n = (a+b) \times (a+b) \times \cdots \times (a+b) \times \cdots \times (a+b) \times (a+b),$$

hvor der er ialt n faktorer på højresiden. Resultatet udregnes ved for hver af de n parenteser at vælge enten a eller b og gange disse sammen. Lad x være et af tallene $0, 1, \ldots, n-1, n$. Vælger vi a fra x parenteser og b fra de resterende $n-x$ bliver produktet $a^x b^{n-x}$. Antallet af sådanne led er $\binom{n}{x}$, nemlig antallet af måder vi kan vælge de x parenteser med a'erne blandt de ialt n parenteser, så bidraget til resutatet fra disse led er $\binom{n}{x} a^x b^{n-x}$, og formlen er vist.

Opgave 2.3 For $x = 0, 1, \ldots, n$ er antallet af delmængder med x elementer $\binom{n}{x}$. Antallet af alle delmængder er derfor

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{x} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n,$$

hvor vi har brugt (2.18) med $a = b = 1$.

Opgave 2.4

1° $\binom{3}{1} = 3$

2° $\binom{8}{3} = 56$

3° $\binom{7}{5} = 21$

4° $\binom{9}{2} = 36$

5° $\binom{3}{1} \times \binom{8}{3} \times \binom{7}{5} \times \binom{9}{2} = 3 \times 56 \times 21 \times 36 = 127008$

6° 4-4-2: $\binom{3}{1} \times \binom{8}{4} \times \binom{7}{4} \times \binom{9}{2} = 3 \times 70 \times 35 \times 36 = 264600$

3-4-3: $\binom{3}{1} \times \binom{8}{3} \times \binom{7}{4} \times \binom{9}{3} = 3 \times 56 \times 35 \times 84 = 493920$

5-4-1: $\binom{3}{1} \times \binom{8}{5} \times \binom{7}{4} \times \binom{9}{1} = 3 \times 56 \times 35 \times 9 = 52920$

7° 3-4-3: $\binom{2}{1} \times \binom{6}{3} \times \binom{7}{4} \times \binom{6}{3} = 2 \times 20 \times 35 \times 20 = 28000$

Opgave 2.5

1° Ved hjælp af (2.22) fås

$$\begin{aligned}\sum_{e \in E} X(e)P(\{e\}) &= \sum_{x \in Vm(X)} \sum_{e:X(e)=x} X(e)P(\{e\}) \\ &= \sum_{x \in Vm(X)} x \sum_{e:X(e)=x} P(\{e\}) \\ &= \sum_{x \in Vm(X)} xP(X=x) = EX\end{aligned}$$

2° Formel (2.26):

$$\begin{aligned}E(a+bX) &= \sum_{e \in E}(a+bX(e))P(\{e\}) = a\sum_{e \in E} P(\{e\}) + b\sum_{e \in E} X(e))P(\{e\}) \\ &= a + bEX\end{aligned}$$

Formel(2.27):

$$\begin{aligned}E(X+Y) &= \sum_{e \in E}(X(e)+Y(e))P(\{e\}) = \sum_{e \in E} X(e)P(\{e\}) + \sum_{e \in E} Y(e))P(\{e\}) \\ &= EX + EY\end{aligned}$$

Opgave 2.6 Hvis $x = 1, 2, 3, 4, 5$ kan antallet af gunstige udfald for hændelsen $X = x$ beregnes således: I de første x kast skal terningen vise et forskelligt antal øjne. Antallet af sådanne kast er $6^{(x)}$. I det $(x+1)$'te kast skal terningen vise et antal øjne, vi allerede har set i de x første kast.

Antallet af sådanne kast er x. I de resterende $6-(x+1)$ kast kan terningen vise et vilkårligt antal øjne. Antallet af sådanne kast er $6^{6-(x+1)}$. Alt i alt er antallet af gunstige derfor

$$6^{(x)} \times x \times 6^{6-(x+1)}.$$

Hvis $x = 6$ er antallet af gunstige 6!, da de 6 forskellige antal øjne kan observeres i tilfældig rækkefølge. Sandsynlighederne fremkommer nu ved at bemærke, at antal mulige udfald for 6 kast med en terning er 6^6. Sandsylighederne kan beregnes ud fra følgende tabel

x	1	2	3	4	5	6
$1296 \times P(X=x)$	216	360	360	240	100	20

og middelværdien er

$$\begin{aligned} EX = \sum_{x=1}^{6} xP(X=x) &= \frac{1}{1296}(1 \times 216 + 2 \times 360 + \cdots + 6 \times 20) \\ &= \frac{3596}{1296} = 2.7747. \end{aligned}$$

Opgave 2.7

$$EG = \left(\frac{36}{\#A} - 1\right)\frac{\#A}{37} - 1\left(1 - \frac{\#A}{37}\right) = \frac{36}{37} - 1 = -\frac{1}{37}.$$

Opgave 2.8

$$EG = \left(\frac{t}{p} - 1\right)p - 1(1-p) = t - 1.$$

Opgave 2.9

1° Da antallet af mulige rækker er $\binom{N}{V}$ og antallet gunstige udfald for hændelsen $\{X = x\}$ er $\binom{V}{x}\binom{N-V}{V-x}$ for $x = 0, 1, \ldots, V$ fås (2.31).

2° Sætter vi i (2.32) $M = V, z = x, n = V$ bliver (2.32) til (2.31), idet $K_0 = \max\{0, V + V - N\} = 0$ og $K_1 = \min\{V, N\} = V$. EX fås af (2.33).

3° Da antallet af gunstige udfald for hændelsen $\{X = x, Y = y\}$ er $\binom{V}{x}\binom{T}{y}\binom{N-V-T}{V-(x+y)}$ fås (2.34).

4° Ved hjælp af (2.31) med $V = 6$ og $N = 48$ fås

x	$P(X=x)$
0	0.42747674
1	0.41592332
2	0.13681688
3	0.01871000
4	0.00105244
5	0.00002054
6	0.00000008

5° Da $P(X = 5, Y = 1) = 0.00000098$, fås ved hjælp at tabellen ovenfor, at sandsynligheden for gevinst er 0.01978306.

6° Ved hjælp af (2.31) med $V = 7$ og $N = 36$ fås:

x	$P(X = x)$
0	0.18697171
1	0.39833103
2	0.29874827
3	0.09958276
4	0.01532042
5	0.00102136
6	0.00002432
7	0.00000012

Da $P(X = 6, Y = 1) = 0.00000168$, fås ved hjælp at tabellen ovenfor, at sandsynligheden for gevinst er 0.01636790.

Opgave 3.1

1° Da $a = 124992$ og $n = 205000$, er $p = a/n = 0.6097$.

2° Da $u = 26240000$ og $p_L = 200$, er $EG = u/n - p_L = -72.00$.

3° $t = u/(np_L) = 0.64$ (64%).

Opgave 3.2

1° Da $a = 14593$ og $n = 9000000$, er $p = a/n = 0.001621$.

2° Da $u = 28960000$ og $p_L = 10$, er $EG = u/n - p_L = -6.78$.

3° $t = u/(np_L) = 0.32$ (32%).

4° $8/9000000 = 0.00000089$.

Opgave 4.1

1° Da

$$P(\{R = r\} \cap \{B = b\}) = \tfrac{1}{36} = \tfrac{1}{6} \times \tfrac{1}{6} = P(\{R = r\})P(\{B = b\})$$

er hændelserne $\{R = r\}$ og $\{B = b\}$ uafhængige.

2° Da

$$P(\{R = 1\} \cap \{S = s\}) = \begin{cases} \tfrac{1}{36} & \text{hvis } s = 2, \dots, 7 \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

$$P(\{R = 1\}) = \frac{1}{6} \quad \text{og} \quad P(\{S = s\}) = \frac{6 - |s - 7|}{36}, \; s = 2, \dots, 12,$$

ses at

$$P(\{R = 1\} \cap \{S = s\}) = P(\{R = 1\})P(\{S = s\})$$

hvis og kun hvis $s = 7$.

Opgave 4.2

1° Da Z angiver det samlede antal spil, vi vinder, fås (4.14). Ved kun at betragte det $i$te spil fås af beskrivelsen i Bemærkning 4.2, at Y_i er $b(1, p)$-fordelt.

2° Da

$$P(Y = y) = \begin{cases} p & \text{hvis } y = 1 \\ 1 - p & \text{hvis } y = 0, \end{cases}$$

er $EY = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p$.

3°

$$\begin{aligned} EZ &= E(Y_1 + \cdots + Y_i + \cdots + Y_n) \\ &= EY_1 + \cdots + EY_i + \cdots + EY_n = p + \cdots + p + \cdots + p = np. \end{aligned}$$

Opgave 4.3

1° $\binom{x}{y}$

2° $\binom{z}{y}$

Opgave 4.4

1° $\binom{5}{2} = 10$

2° Da 3 af de 5 kampe er rigtige, er der $\binom{3}{2} = 3$ kombinationer med præmie, nemlig kamp 18 og 19 med en præmie på $2.70 \times 3.00 \times 10 = 81.00$ kr., kamp 18 og 21 med 40.50 $\downarrow$ 40 kr. og kamp 19 og 21 med 45.00 kr, i alt 166 kr.

3° $166 - 100 = 66$ kr.

Opgave 4.5

1° $\binom{6}{3} \times 10$ kr. $= 200$ kr.

2° Da 4 af de 6 kampe er rigtige, er der $\binom{4}{3} = 4$ kombinationer med præmie. Kombinationen (18, 19, 21) giver $2.70 \times 3.00 \times 1.50 \times 10 = 121.50 \downarrow 121$ kr., (18, 19, 22) giver 109.30 $\downarrow$ 109 kr., (18, 21, 22) giver 54.60 $\downarrow$ 54 kr. og (19, 21, 22) giver 60.70 $\downarrow$ 60 kr. Den samlede præmie er derfor 344 kr. og gevinsten 144 kr.

Opgave 4.6

1° Lad p_1, $p_\times$ og p_2 være sandsynlighederne svarende til odds o_1, $o_\times$ og o_2, og p_1^*, $p_\times^*$ og p_2^* sandsynlighederne svarende til o_1^*, $o_\times^*$ og o_2^*.
Da er

$$p_2^* = p_\times + p_2 = \frac{t}{o_\times} + \frac{t}{o_2} = t\left(\frac{1}{o_\times} + \frac{1}{o_2}\right),$$

fås

$$o_2^* = \frac{t}{p_2^*} = \frac{1}{\frac{1}{o_\times} + \frac{1}{o_2}}.$$

Tilsvarende er

$$p_1 = p_1^* + p_\times^* = t\left(\frac{1}{o_1^*} + \frac{1}{o_\times^*}\right),$$

hvilket giver

$$o_1 = \frac{t}{p_1} = \frac{1}{\frac{1}{o_1^*} + \frac{1}{o_\times^*}}.$$

Opgave 4.7

1° Odds for Høkeren: $0.8 \times 24326/8522 = 2.28$

2°

Nr.	Hest	indskud	gevinst+indskud	Odds
2	Go'dante	2377	4178.33	1.75
4	Høkeren	2654	4455.33	1.67
12	Julia Palema	490	2291.33	4.67
Sum		5521	10925	

Opgave 5.1 Beregningen af præmierne fremgår af tabellen nedenfor.

	Rækker	*Præmiepulje*	*Bruttopræmie*	*Statsafgift*	*Præmie*
12	0	285450.30	—	—	—
11	14	285450.30	20389.30	3028.40	17360
10	261	285450.30	1093.67	134.05	959

Opgave 5.2 Beregningen af præmierne fremgår af tabellen nedenfor.

	Rækker	*Præmiepulje*	*Bruttopræmie*	*Statsafgift*	*Præmie*
13	10	437710.91	43771.09	6535.66	37235
12	201	291807.27	1451.77	187.77	1264
11	2190	291807.27	133.24	0.00	133
10	15128	437710.91	28.93	0.00	28

Opgave 5.3

1° Præmiepuljen til 7 rigtige i uge 40 var i kr.

$$13283910 \times 0.45 \times 0.40 + 6074938.80 = 8466042.60,$$

så præmien til en enkelt række med 7 rigtige var i kr.

$$(8466042.60 - 200.00) \times 0.85 + 200.00 = 7196165.70$$

som rundes ned til 7196165 kr.

2°

	Rækker	*Præmiepulje*	*Bruttopræmie*	*Statsafgift*	*Præmie*
7	3	8466042.60	2822014.20	423272.13	2398742
6	1	597775.95	597775.95	89636.39	508139
5	18	597775.95	33209.77	4951.47	28258
4	232	597775.95	2576.62	356.49	2220
3	2284	597775.95	261.72	9.26	252
2	24065	1195551.90	49.68	0.00	49

Opgave 5.4 Præmiepuljen til 7 rigtige vindertal er i kr.

$$76954281 \times 0.45 \times 0.25 + 10588235.30 = 19245591.61,$$

så beregningerne var:

	Rækker	*Præmiepulje*	*Bruttopræmie*	*Statsafgift*	*Præmie*
7	0	19245591.61	—	—	—
6+1	44	3116648.38	70832.91	10594.94	60237
6	504	2424059.85	4809.64	691.45	4118
5	23171	3809236.91	164.39	0.00	164
4	366326	16622124.70	45.37	0.00	45

Opgave 5.5 Af Opgave 4.7 fremgår, at Julia Palema blev nummer 3 i løbet, så der er ingen gevinst i *Vinder*. I Opgave 4.7 blev odds for hesten i *Plads* beregnet til 4.67, så den samlede præmie er 4.67×500 kr. $= 2335$ kr.

REFERENCER

Andersen, E. B. (1998): *Har du en chance? - I TIPS, LOTTO OG ANDRE SPIL.* AKADEMISK FORLAG A/S.

Hoffmann-Jørgensen, J. (1994): *Probability with a view toward statistics. Volume 1.* CHAPMAN & HALL, New York.

INDEKS

T

U

V

Ø

1.	AB – AaB	1		
2.	AGF – FC Nordsjælland	1		
3.	Frem – Brøndby			2
4.	Herfølge – FC Midtjylland		×	
5.	Viborg – Esbjerg			2
6.	HFK Sønderjylland – Randers FC		×	
7.	Horsens – Brønshøj	1		
8.	Køge – Vejle	1		
9.	Silkeborg – B 1913	1		
10.	Skjold – Fremad Amager		×	
11.	Ølstykke – Nykøbing F All.	1		
12.	Hvidovre – Næstved			2

En udfyldt række på tipskuponen i uge 31 i 2003.

Kamp	1	×	2
AaB – FC Midtjylland	2.00	3.35	2.85
AB – Farum	2.10	3.30	2.70
AGF – Esbjerg	2.45	3.00	2.45
Brøndby – FC København	1.95	3.25	3.05
OB – Silkeborg	1.50	4.40	3.90
Viborg – Køge	1.35	4.10	6.00

Odds for de seks kampe i næstsidste runde af SAS-ligaen 2002/03.